56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 23.04.2016. godine

56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 23.04.2016. godine

PRVI RAZRED

Zadatak 1

Naći najmanju brojnu vrijednost izraza:

$$A=\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+x^3+\frac{1}{x^3}}$$

za realne brojeve $x>0$.

Zadatak 2

Neka je ABC jednakokraki trougao i $\sphericalangle BAC = 100^0$. Neka je D presječna tačka simetrale ugla $\sphericalangle ABC$ i stranice AC, dokazati da je $\overline{AD}+\overline{DB}=\overline{BC}$.

Zadatak 3

Dato je devet pravih takvih da svaka od njih siječe dati kvadrat $ABCD$ na dva trapeza, čije se površine odnose kao 2:3. Dokazati da bar tri prave, od datih devet, prolaze istom tačkom.

Zadatak 4

Neka su a i b različiti prirodni brojevi, veći od 10^6, sa osobinom da je broj $(a+b)^3$ djeljiv brojem ab. Dokazati da je $|a-b|>10^4$.

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.
Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.
Sretno!

56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 23.04.2016. godine

DRUGI RAZRED

Zadatak 1

Ako je $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ za sve $x \in [-1, 1]$, dokazati da je tada:

a) $|c| \leq 1$,

b) $|a + c| \leq 1$,

c) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$.

Zadatak 2

Neka su a i b cijeli brojevi takvi da $2ab$ dijeli $a^2 + b^2 - a$. Dokazati da je a kvadrat prirodnog broja.

Zadatak 3

Duž AB je prečnik polukružnice h. Na ovoj polukružnici nalazi se tačka C, različita od tačaka A i B. Podnožje normale iz tačke C na duž AB je D. Kružnica k nalazi se izvan trougla ADC i dodiruje istovremeno polukružnicu h i duži AB i CD. Dodirište kružnice k sa duži AB je tačka E, sa polukružnicom h je tačka T, a sa duži CD je tačka S.

a) Dokazati da su tačke A, S i T kolinearne.

b) Dokazati da su duži AC i AE jednake dužine.

Zadatak 4

Neka je A skup 65 cijelih brojeva koji daju različite ostatke pri dijeljenju sa 2016. Dokazati da postoji podskup $B = \{a, b, c, d\}$ skupa A za koji vrijedi da je

$$a + b - c - d$$

djeljivo sa 2016.

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.
Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.
Sretno!

56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 23.04.2016. godine

TREĆI RAZRED

Zadatak 1

Neka su a i b realni brojevi veći od 1. Odrediti najveću vrijednost $c \in \mathbb{R}$ za koju je zadovoljena nejednakost

$$\frac{1}{3+\log_a b}+\frac{1}{3+\log_b a} \geq c$$

Zadatak 2

Da li postoji pravougli trougao, čije su dužine kateta prirodni brojevi, a čija hipotenuza ima dužinu 2016^{2017}? Odgovor detaljno obrazložiti.

Zadatak 3

Neka su h_a, h_b, h_c visine, t_a, t_b, t_c težišnice oštrouglog trougla, spuštene na stranice a, b, c redom, r poluprečnik upisane, R poluprečnik opisane kružnice tog trougla. Dokazati da vrijedi $\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c} \leq 1+\frac{R}{r}$. Kad se dostiže jednakost?

Zadatak 4

Data je kružnica s centrom u koordinatnom početku poluprečnika 2016. Na kružnici i unutar nje odabrano je 540 tačaka s cjelobrojnim koordinatama od kojih nikoje tri ne leže na istoj pravoj. Dokazati da postoje dva trougla s vrhovima u datim tačkama koji imaju iste površine.

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.
Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.
Sretno!

56. TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE

FEDERALNO PRVENSTVO UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Sarajevo, 23.04.2016. godine

ČETVRTI RAZRED

Zadatak 1

Neka je $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n}$ za $n \geq 1$. Dokazati da je:

a) $n \leq {a_n}^2 < n + \sqrt[3]{n}$,

b) $\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \sqrt{n}\right) = 0$.

Zadatak 2

Odredi sve elemente $n \in A = \{2, 3, \dots, 2016\} \subset \mathbb{N}$ sa sljedećom osobinom: svaki broj $m \in A$ koji je manji od n, i relativno prost sa njim, mora biti prost.

Zadatak 3

Kružnica poluprečnika R_1 je upisana u oštri ugao α. Druga kružnica poluprečnika R_2 dodiruje jedan od krakova ugla α u istoj tački kao prva kružnica i siječe drugi krak tog ugla u tačkama A i B, a pri tome centri obje kružnice leže unutar ugla α. Dokazati da je:

$$\overline{AB} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{(R_2 - R_1)\left(R_1\cos^2\frac{\alpha}{2} + R_2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Zadatak 4

Odrediti sve funkcije $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju uslove:

a) $f(1) + 2 > 0$,

b) $f(x+y) - xf(y) - yf(x) = f(x)f(y) + f(x) + f(y) + xy$, za $\forall x, y \in \mathbb{Q}$,

c) $f(x) = 3f(x+1) + 2x + 5$, za $\forall x \in \mathbb{Q}$.

Trajanje izrade zadataka je 210 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.
Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i crtanje.
Sretno!

Rješenja

PRVI RAZRED

Zadatak 1

I način

Kako je $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6 = x^6 + \frac{1}{x^6} + 6\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 15\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 20$

Dati se izraz može pojednostaviti na sljedeći način:

$$A = \frac{6\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 15\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 18}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{6\left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}\right) + 15\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6}{\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right)\right)}$$

$$= \frac{6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 15\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6}{\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2x^2 + \frac{2}{x^2} + 1\right)}$$

$$= \frac{6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6}{\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2x^2 + \frac{2}{x^2} + 1\right)}$$

$$= \frac{6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2x^2 + \frac{2}{x^2} + 1\right)}$$

$$= \frac{\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right)\left(6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2x^2 + \frac{2}{x^2} + 1\right)}$$

$$= \frac{3\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right)\left(2x^2 + \frac{2}{x^2} + 1\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(2x^2 + \frac{2}{x^2} + 1\right)}$$

$$= \frac{3\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}{x + \frac{1}{x}}$$

$$= 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Budući da je $x + \frac{1}{x} \geq 2$, za $x > 0$, zaključujemo da je $\min A = 6$ za $x = \frac{1}{x}$, tj. za $x = 1$.

II način

Uvedemo smjenu $x + \frac{1}{x} = t$. Tada je

$$A = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + x^3 + \frac{1}{x^3}}$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) = t^3 - 3t$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 - 2 = (t^3 - 3t)^2 - 2 = t^6 - 6t^4 + 9t^2 - 2$$

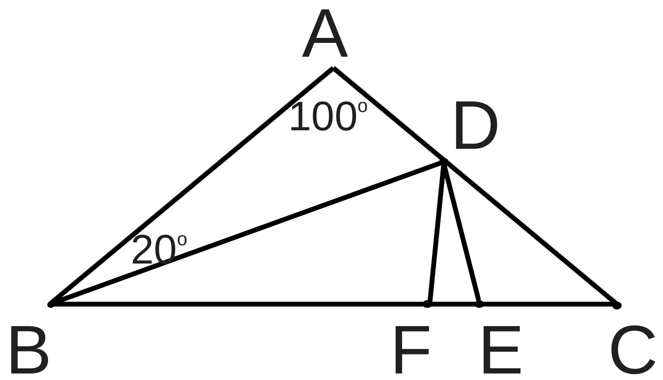
Sada je:

$$A = \frac{t^6 - (t^6 - 6t^4 + 9t^2 - 2) - 2}{t^3 + t^3 - 3t} = \frac{6t^4 - 9t^2}{2t^3 - 3t} = 3t = 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 3 \cdot 2$$

Dakle, $A \geq 6$, za $x = 1$.

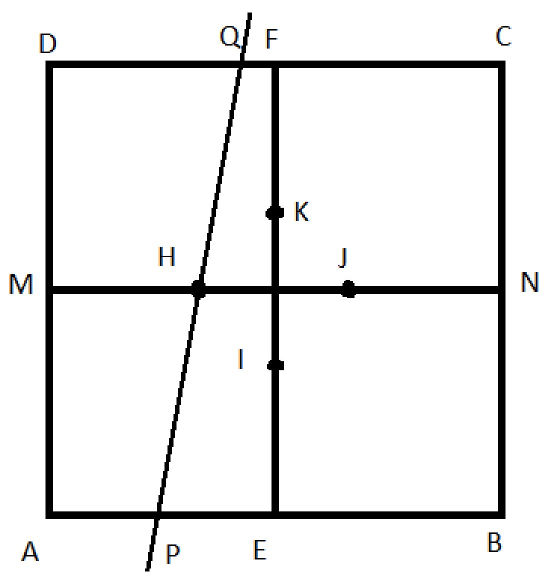
Zadatak 2

Neka je E tačka na BC takva da je $BE = BD$. Tada je trougao BED jednakokraki sa uglom između krakova od 20^0. Tada su uglovi na osnovici 80^0. Ugao $\sphericalangle BED$ je vanjski ugao trougla ECD, pa je $80^0 = \sphericalangle BED = \sphericalangle ECD + \sphericalangle CDE$. Odavdje je $\sphericalangle CDE = 40^0$, jer je $\sphericalangle ECD = 40^0$. To znači da je trougao ECD jednakokraki, pa je $DE = EC$. Neka je F tačka na BC takva da je $BF = BA$. Tada su trouglovi ABD i FBD podudarni (pravilo SUS). Odavdje slijedi $\sphericalangle BDF = \sphericalangle BDA = 60^0$ i $AD = DF$. No, tada je $\sphericalangle FDC = 60^0$. S druge strane je $\sphericalangle CFD$ vanjski ugao trougla BFD, pa je $\sphericalangle CFD = 80^0$. Prema tome, trougao CDF je jednakokrak, pa je $AD = DF = DE = EC$. Zbog toga je $BD + AD = BE + EC = BC$.



Zadatak 3

Neka je dati kvadrat *ABCD*. Jasno je da svaka od ovih pravih siječe po dvije naspramne stranice kvadrata. Neka je *a* jedna od tih 9 pravih i neka ona dijeli kvadrat na dva trapeza čije se površine odnose *2:3*. Neka ta prava siječe stranice *AB* i *CD* redom u tačkama *P* i *Q*. Ona dijeli kvadrat na trapeze *APQD* i *PBCQ*. Oba ova trapeza imaju iste visine, pa se njihove površine odnose kao dužine odgovarajućih srednjih linija.



Neka su *M* i *N* sredine stranica *AD* i *BC* redom. Neka prava *a* siječe duž *MN* u tački

H. Tada je *H* sredina duži *PQ*. Tada *MH* i *HN* srednje linije trapeza *APQD* i *PBCQ*. Kako se površine odnose *2:3*, to je *MH:HN=2:3*. Nekia je *J* tačka simetrična tački *H* u odnosu na centar kvadrata. Tda svaka prava koja prolazi tačkom J i dijeli kvadrat na 2 trapeza ima osobinu da se površine ta dva trapeza odnose kao *2:3.* Analogno se zaključuje da postoje još dvije tačke sa traženom osobinom (sa slike su to tačke *I* i *K*). Prema tome, svaka od ovih devet pravih prolazi jednom od 4 tačke: *H*, *I*, *J* i *K*. Dirichzletovim principom zaključujemo da će bar kroz jednu od njih proći bar tri prave.

Zadatak 4

Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je $a > b$. Neka je $k = (a, b)$ najmanji zajednički djelilac brojeva a i b. Tada je $a = km$ i $b = kn$, pri čemu su m i n relativno prosti prirodni brojevi i $m > n$. Očito je

$|a - b| = a - b = k(m - n) \geq k.$

Dokazat ćemo da je $k > 10000$. Pretpostavimo da je $k \leq 10000$. Tada je $m > n > 100$. Iz činjenice da $ab|(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ slijedi da $ab|a^3 + b^3$, tj. $k^2mn|k^3(m^3 + n^3) \Rightarrow mn|k(m^3 + n^3)$. Pošto su m i n relativno prosti, ovo je moguće samo ako $m|k$ i $n|k$, tj $mn|k$. S druge strane imamo da je $mn > 10000 \geq k \Rightarrow mn > k$. Time smo dobili kontradikciju, pa je zato $k > 10000 \Rightarrow |a - b| > 10000$.

DRUGI RAZRED

Zadatak 1

Za $x = 0$ je $|c| \leq 1$, dok za $x = 1$ i $x = -1$ imamo

$$|a + b + c| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq a + b + c \leq 1 \qquad (1)$$

$$|a - b + c| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq a - b + c \leq 1 \qquad (2)$$

Sabiranjem (1) i (2) dobije se

$$-2 \leq 2(a + c) \leq 2 \Leftrightarrow |a + c| \leq 1.$$

Odavde je

$$-1 \leq a + c \leq 1 \Leftrightarrow -1 - c \leq a \leq 1 - c.$$

Kako je $|c| \leq 1$, odavde slijedi da je $|a| \leq 2$, pa je $|ac| \leq 2$, što implicira da je

$$-2ac \leq 4. \qquad (3)$$

Kvadriranjem nejednakosti (1) i (2) dobijamo nejednakosti

$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \leq 1$ i $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac \leq 1$

Saberemo li ove dvije nejednakosti, dobit ćemo $2(a^2 + b^2 + c^2) + 4ac \leq 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 - 2ac \leq 1 + 4 = 5$, na osnovu relacije (3).

Zadatak 2

Neka je $a^2 + b^2 - a = 2abq$. Odavde je $b^2 - 2abq + a^2 - a = 0$. Posmatrajmo kvadratnu jednačinu:

$$x^2 - 2aqx + a^2 - a = 0.$$

Ova jednačina ima jedno rješenje b. Dakle, ona ima rješenje u skupu cijelih brojeva pa je njena diskriminanta potpun kvadrat. Dakle, $D = 4a^2q^2 - 4(a^2 - a) = 4(a^2q^2 - a^2 + a)$. Kako je D potpun kvadrat, to je $a^2q^2 - a^2 + a = A^2$ gdje je A cio broj. Odavde imamo

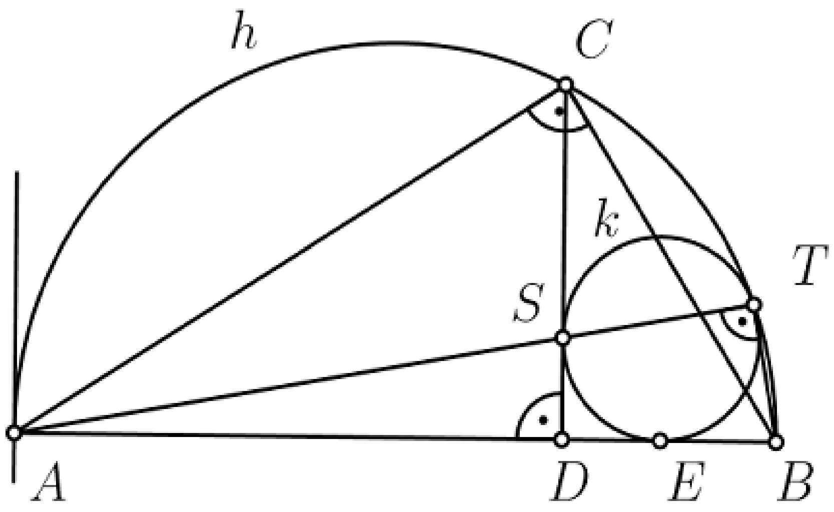
$$a(a(q^2 - 1) + 1) = A^2.$$

Tada je $a = du^2$, $a(q^2 - 1) + 1 = dv^2$, gdje je $d = nzd(a, a(q^2 - 1) + 1) = 1$. Dakle $a = 1 \cdot u^2 = u^2$, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 3

a) Homotetija s centrom u tački T koja kružnicu polukružnice h preslikava na polukružnicu k, preslikava tačku A u tačku S' koja leži na kružnici k. Kako homotetija čuva uglove, to je tangenta na k u S' paralelna tangenti na polukružnicu h u tački A, pa je okomita na AB. Dakle, tangenta u S' je zapravo kolinearna sa CD, što znači da se tačke S i S' podudaraju, čime smo dokazali da su A, S i T kolinearne tačke.

b) U trouglu ABC koji je pravougli vrijedi $AC^2 = AD \cdot AB$. Na osnovu potencije tačke u odnosu na kružnicu imamo $AE^2 = AS \cdot AT$. Trouglovi ADS i ATB su slični, kao pravougli trouglovi sa jednim zajedničkim uglom, pa je $AS : AD = AB : AT$, odnosno $AD \cdot AB = AS \cdot AT$, odakle odmah zaključujemo da je $AC^2 = AE^2$, čime je tvrdnja dokazana.



Zadatak 4

Dovoljno je pokazati da postoje dva dvoelementna podskupa $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$ skupa A sa (svim) različitim elementima za koje vrijedi $a + b \equiv c + d \mod (2016)$. Stoga ćemo posmatrati familiju svih dvoelementnih podskupova skupa A. Ovih skupova ima ukupno $\frac{(65 \cdot 64)}{2} = 2080$. Za svaka dva skupa koja imaju tačno jedan isti element, sume njihovih elemenata su kongruentne različitim brojevima po modulu 2016. Prema tome, ne mogu postojati dva dvoelementna podskupa skupa A sa osobinom da su sume njihovh elemenata kongruentne istom broju po modulu 2016 i koji imaju tačno jedan element isti. Dakle, ako za dvočlane podskupove $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$ vrijedi $a + b \equiv (c + d)\ mod\ (2016)$, elementi $a, b, c\ i\ d$ skupa A moraju biti različiti.

Obzirom da je ukupan broj dvoelementnih podsupova od A jednak $2080 > 2016$, po Dirichletovom principu postoje dva skupa sa osobinom da su sume njihovih elemenata kongruentne istom broju po modulu 2016.

TREĆI RAZRED

Zadatak 1

Stavimo $w = \frac{1}{3+\log_a b} + \frac{1}{3+\log_b a}$ i $x = \log_a b$. Tada je $\log_b a = \frac{1}{x}$. Sada je $x > 0$ i

$$w = \frac{1}{3+x} + \frac{x}{1+3x} = \frac{x^2+6x+1}{(3+x)(1+3x)} = \frac{8x+\frac{1}{3}(3+x)(1+3x)}{(3+x)(1+3x)} = \frac{8x}{(3+x)(1+3x)} + \frac{1}{3} > \frac{1}{3}$$

za sve $x > 0$.

Za dovoljno veliko x, ili x dovoljno blizu 0, izraz $\frac{8x}{(3+x)(1+3x)}$ se može učiniti po volji malim, ali uvijek je pozitivan. Dakle, najveća moguća vrijednost od *c* je $\frac{1}{3}$.

Zadatak 2

Pretpostavimo da takav trougao postoji, tj da postoje prirodni brojevi *a* i *b*, takvi da je:

$$a^2 + b^2 = (2016^{2017})^2$$

Kako je $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, to imamo da je:

$$a^2 + b^2 = 2^{20170} \cdot 3^{8068} \cdot 7^{4034}$$

odakle slijedi da su *a* i *b* parni. To znači su obje strane jednakosti djeljive sa 4^n. Kako je $2^{20170} = 4^{10085}$, to *a* i *b* moraju biti oblika:

$$\begin{aligned} a &= 2^{10085} \cdot m \\ b &= 2^{10085} \cdot n \end{aligned}$$

Sada prethodna jednakost postaje:

$$m^2 + n^2 = 3^{8068} \cdot 7^{4034}$$

Vidimo da 3 dijeli $m^2 + n^2$, pa se lahko zaključi da *m* i *n* moraju biti djeljivi sa 3. Odavdje dobijamo da mora biti:

$$\begin{aligned} m &= 3^{4034} \cdot u \\ n &= 3^{4034} \cdot v \end{aligned}$$

Sada dobijamo da je

$$u^2 + v^2 = 7^{4034}$$

Analogno zaključujemo da su *u* i *v* takođe djeljivi sa 7, pa su oblika:

$$\begin{aligned} u &= 7^{2017} \cdot s \\ v &= 7^{2017} \cdot t \end{aligned}$$

pa je

$$s^2 + t^2 = 1$$

što je nemoguće za *s* i *t* prirodne brojeve. Dakle, trougao sa traženim svojstvom ne postoji.

Zadatak 3

Pomnožimo obje strane nejednakosti sa *P* (površinom trougla).

Koristeći:

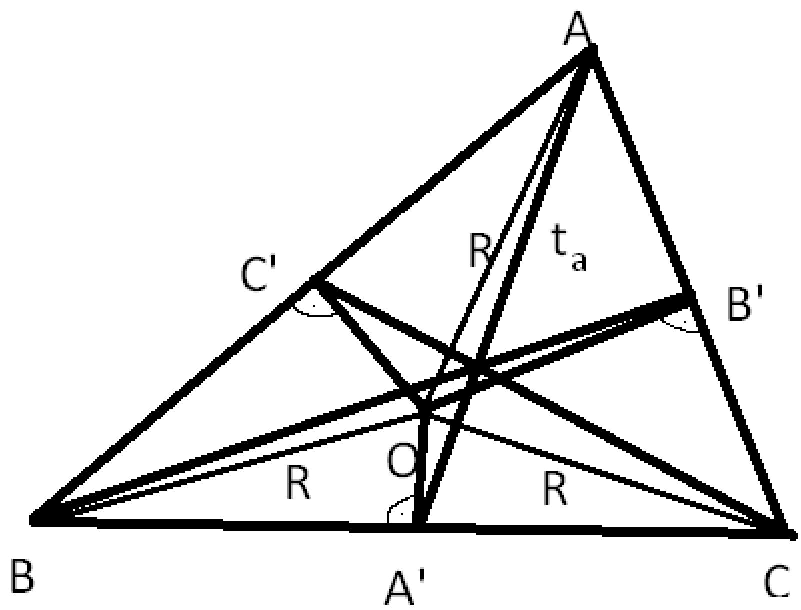
$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} (= r \cdot s) = r \cdot \frac{a+b+c}{2}$$

dobijamo nejednakost:

$$\frac{a \cdot t_a}{2} + \frac{b \cdot t_b}{2} + \frac{c \cdot t_c}{2} \leq P + R \cdot \frac{a+b+c}{2}$$

ili

$$\frac{(t_a - R) \cdot a}{2} + \frac{(t_b - R) \cdot b}{2} + \frac{(t_c - R) \cdot c}{2} \leq P$$



Uočimo da je u trouglu AOA':

$AO + OA' \geq AA'$, tj. $t_a - R \leq OA'$

Ananlogno je i $t_b - R \leq OB'$ i $t_c - R \leq OC'$.

Dakle, sada je:

$$\frac{(t_a - R) \cdot a}{2} + \frac{(t_b - R) \cdot b}{2} + \frac{(t_c - R) \cdot c}{2} \leq \frac{OA' \cdot a}{2} + \frac{OB' \cdot b}{2} + \frac{OC' \cdot c}{2} = P$$

što je i trebalo pokazati.

Jednakost se postiže kada je $t_a - R = OA'$, $t_b - R = OB'$ i $t_c - R = OC'$, odnosno kada je trougao ABC jednakostraničan.

Zadatak 4

Pretpostavimo suprotno, tj. da svi trouglovi imaju različitu površinu. Ukupno takvih trouglova imamo $\binom{540}{3} = \frac{540 \cdot 539 \cdot 538}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 26\ 098\ 380$.

Obzirom da je površina trougla ABC data formulom:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left| A_x \cdot (B_y - C_y) + B_x \cdot (C_y - A_y) + C_x \cdot (A_y - B_y) \right|$$

to je površina trougla prirodan broj podijeljen sa 2.

Dakle, kako trouglova ima 26098380, najveća površina će biti veća od $\frac{26098380}{2} = 13\,049\,190$.

Površina kruga je $2016^2 \cdot \pi < 2016^2 \cdot 3{,}2 = 13\,005\,619{,}2 < 13\,049\,190$.

To znači, da najveći trougao ne bi mogao biti upisan u krug, pa moraju postojati bar 2 trougla sa istom površinom.

ČETVRTI RAZRED

Zadatak 1

a) Kako vrijedi $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n}$, to kvadriranjem posljednje jednakosti dobijamo da vrijedi

$$a_{n+1}{}^2 = a_n{}^2 + 2a_n \frac{1}{2a_n} + \frac{1}{4a_n{}^2} > a_n{}^2 + 1$$

Koristeći posljednju nejednakost, matematičkom indukcijom se lahko pokaže da je $a_n{}^2 \geq n$.

Drugi dio ćemo, takođe, dokazati koristeći princip matematičke indukcije. Očigledno je $a_1{}^2 = 1 < 1 + \sqrt[3]{1}$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n. Za $n+1$ ćemo imati:

$$a_{n+1}{}^2 = a_n{}^2 + 1 + \frac{1}{4a_n{}^2}$$

Sada zbog pretpostavke indukcije je

$$a_{n+1}{}^2 < n + \sqrt[3]{n} + 1 + \frac{1}{4a_n{}^2}$$

a kako je $a_n{}^2 \geq n$, to je

$$a_{n+1}{}^2 < n + 1 + \sqrt[3]{n} + \frac{1}{4n}$$

pa je sad dovoljno dokazati još da je

$$\sqrt[3]{n} + \frac{1}{4n} < \sqrt[3]{n+1}$$

$$\frac{1}{4n} < \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}} < 4n$$

$$\frac{n+1-n}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}} < 4n$$

$$\frac{\sqrt[3]{n+1}^3-\sqrt[3]{n}^3}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}} < 4n$$

$$\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{(n+1)^2} < 4n$$

Nakon dijeljenja posljednje nejednakosti sa $\sqrt[3]{n^2}$, dobijamo:

$$1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} < 4\sqrt[3]{n}$$

Što je tačno jer je $1+\frac{1}{n} < 2$ i $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} < 4 \leq 4\sqrt[3]{n}$.

b) Tvrdnja slijedi primjenom teorema o uklještenju.

Zadatak 2

Označimo sa M traženi skup. Neka je $n \in M$. Ako je $p^2 < n$ za neki prost p, tada p mora dijeliti n. Naime, ako bi n i p bili relativno prosti, tada bi, p^2 zbog $n \in M$ bio prost broj. Dakle, $n \in M$ i $n > p^2$ povlači da p dijeli n.

Kako je $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310 > 2016$ to brojevi iz M ne mogu biti veći od $11^2 = 121$.

Ako je $n \in M$ i $49 < n \leq 121$, tada je n djeljivo sa $2, 3, 5$ i 7, što je nemoguće zbog $n \leq 121$. Dakle, za $n \in M$ vrijedi $n \leq 49$.

Ako je $n \in M$ i $25 < n \leq 49$, tada je n djeljivo sa $2, 3$ i 5, odakle zaključujemo da je $n = 30$.

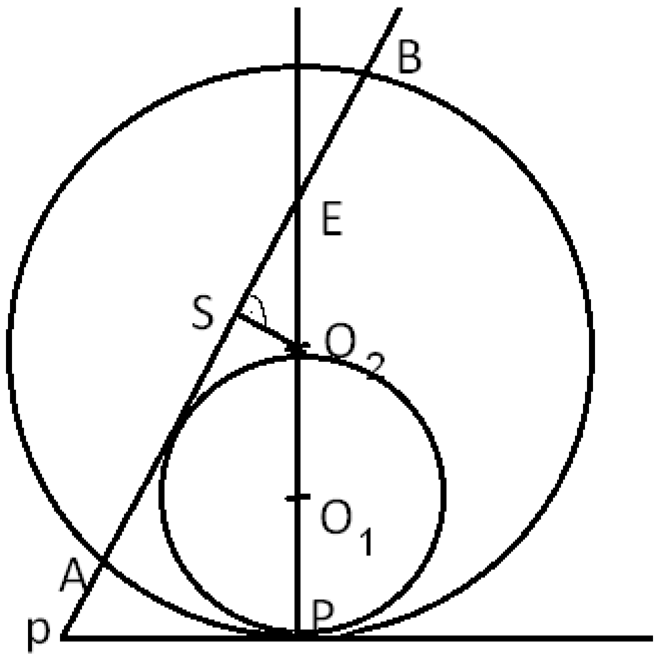
Ako je $n \in M$ i $9 < n \leq 25$, tada je n djeljivo sa 2 i 3, što nam daje da $n \in \{12, 18, 24\}$..

Konačno, za $n \in M$ i $4 < n \leq 9$ n mora biti djeljivo sa 2, što nam daje $n \in \{6, 8\}$.

Kako su 2, 3 i 4 očigledno iz M, to je $M = \{2,3,4,6,8,12,18,24,30\}$.

Zadatak 3

1. Neka su O_1 i O_2 centri prvog, odnosno drugog kruga, tačka P neka je vrh datog ugla (tj.$\sphericalangle APD = \alpha$), D dodirna tačka prvog i drugog kruga, E presjek pravih O_1O_2 i AB, a S središte duži $\overline{AB}$.



Očito je $\sphericalangle SO_2E = \alpha$ kao uglovi sa okomitim kracima, pa je $\overline{O_2S} = \overline{O_2E}\cos\alpha \quad (1)$

Pošto tačka O_1 leži na simetrali $\sphericalangle APD$ imamo da je $\overline{PD} = R_1 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \quad (2)$

U trouglu EPD je $\overline{DE} = \overline{PD}\operatorname{tg}\alpha \overset{(2)}{=} R_1 \cdot \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2R_1}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2R_1\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} \qquad (3)$

Iz (3) slijedi: $\overline{O_2E} = \overline{DE} - \overline{O_2D} = \dfrac{2R_1\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} - R_2 = \dfrac{2R_1\cos^2\frac{\alpha}{2} - R_2\cos\alpha}{\cos\alpha}$, pa onda

zbog (1): $\overline{O_2S} = \overline{O_2E}\cos\alpha = 2R_1\cos^2\frac{\alpha}{2} - R_2\cos\alpha \qquad (4)$

U pravouglom trouglu AO_2S zaključujemo:

$$\overline{AS}^2=\overline{AO_2}^2-\overline{O_2S}^2\Rightarrow\frac{1}{4}\overline{AB}^2=R_2^2-\overline{O_2S}^2\overset{(4)}{=}R_2^2-\left(2R_1\cos^2\frac{\alpha}{2}-R_2\cos\alpha\right)^2=\ldots$$

Poslije sređivanja dobijamo:

$$\overline{AB}=4\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{(R_2-R_1)\left(R_1\cos^2\frac{\alpha}{2}+R_2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Zadatak 4

Posmatrajmo funkciju $g(x)=f(x)+x+1$, odnosno imamo da je $f(x)=g(x)-x-1$. Sada dati uslovi postaju:

a) $g(1)>0$

b) $g(x+y)=g(x)\cdot g(y)$, za sve $x,y\in\mathbb{Q}$

c) $g(x+1)\ =\ \frac{1}{3}g(x)$, za sve $x\in\mathbb{Q}$

Iz uslova b) za $x=0,y=1$, imamo zbog a) da je:

$g(1)=g(0)\cdot g(1)\Rightarrow g(0)=1.$

Dalje, iz uslova c) je $g(1)=\frac{1}{3},g(2)=\frac{1}{3^2},\ldots$ pa indukcijom dokažemo da je $g(n)=3^{-n},\forall n\in\mathbb{N}$.

Kako je, $1=g(0)=g\big(x+(-x)\big)=g(x)\cdot g(-x)$, to je $g(-x)=3^{-(-x)}$, pa je $g(n)=3^{-n},\forall n\in\mathbb{Z}$.

sada je $\frac{1}{3}=g(1)=g\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=g\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$, pa je $g\left(\frac{1}{n}\right)=3^{-\frac{1}{n}},\forall n\in\mathbb{N}$.

Analogno je i $g\left(\frac{m}{n}\right)=g\left(m\cdot\frac{1}{n}\right)=\left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m=3^{-\frac{m}{n}},m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}$. Dakle, $f(x)=3^{-x}-x-1,\forall x\in\mathbb{Q}$.