BOSNA I HERCEGOVINA
FEDERACIJA BOSNE I HERCEGOVINE
KANTON SREDIŠNJA BOSNA / SREDNJOBOSANSKI KANTON TRAVNIK

MINISTARSTVO OBRAZOVANJA,
ZNANOSTI, KULTURE I ŠPORTA
MINISTARSTVO OBRAZOVANJA,
NAUKE, KULTURE I SPORTA

CENTRAL BOSNIA CANTON
MINISTRY OF EDUCATION,
SCIENCE, CULTURE AND SPORTS

Kantonalno takmičenje iz matematike učenika srednjih škola na području SBK

2015/16.

Donji Vakuf, 19.04.2016.

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA I RAZRED

1. Ako je $x+y+z=1$ i $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, izračunati $x^2+y^2+z^2$. 24 b

2. Na prijemnom ispitu iz matematike rješava se 40 zadataka. Tačno riješen zadatak vrijedi 15 bodova, a netačno riješen -4 boda. Dino je riješio sve zadatke, ali nažalost neke je pogriješio. Koliko je ukupno pogrešnih odgovora dao ako je na ispitu osvojio ukupno 353 boda? 18 b

3. Za koju vrijednost realnog parametra a jednačina 28 b

$$\frac{a-5}{x+1}-\frac{7+3a}{x-2}=\frac{2ax-5}{x^2-x-2}$$

nema rješenja?

4. U trouglu ABC je $a=\overline{BC}, b=\overline{AC}, c=\overline{AB}$. Dokazati da je dužina težišnice iz vrha A jednaka 30 b

$$t_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

Napomena: *Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta. Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.*

Mnogo uspjeha u radu!

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA II RAZRED

1. Izračunati 18 b

$$\frac{(1+i)^{1986}}{(1-i)^{1986}-(1+i)^{1986}}$$

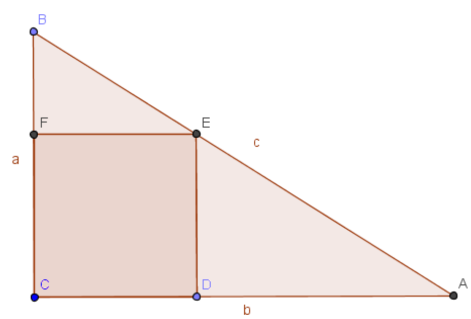
2. Za koje vrijednosti realnog parametra m je 28 b

$$\left|\frac{x^2-mx+1}{x^2+x+1}\right|<3$$

za sve $x \in R$?

3. Odrediti trougao čije stranice i površina mogu da se izraze pomoću četiri uzastopna cijela broja. 24 b

4. U pravougli trougao sa hipotenuzom dužine $c = 35$ upisan je kvadrat sa stranicom dužine $d = 12$ kao na slici. Odrediti dužine kateta tog trougla. 30 b



Napomena: *Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta. Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.*

Mnogo uspjeha u radu!

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA III RAZRED

1. Riješiti jednačinu $log_7(6+7^{-x})=x+1.$ 18 b

2. Neka su $\alpha\ i\ \beta$ oštri pozitivni uglovi koji zadovoljavaju relacije 27b

$$3sin^2\alpha+2sin^2\beta=1$$
$$3sin2\alpha-2sin2\beta=0.$$

Dokazati da je $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

3. Jedan ugao trougla je 120^o, a njegove stranice su $x, x+4, x+8.$ 25 b
Odrediti dužine stranica trougla i njegovu površinu.

4. Iz fokusa parabole $y^2=12x$ pod oštrim uglom α prema $x-osi$, usmjeren je zrak svjetlosti koji se odbija od parabolu. Napisati jednačinu prave po kojoj se kreće odbijeni zrak ako je $tg\alpha=\frac{3}{4}$. 30 b

Napomena: *Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta. Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.*

Mnogo uspjeha u radu!

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
ZA IV RAZRED

1. Da li postoji prirodan broj n takav da je $n^2 - 15n + 1$ djeljiv sa 289? 25 b

2. Neka je p realan broj. Odrediti rješenja jednačine 30 b

$$x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0$$

ako je poznato da su ta rješenja uzastopni članovi aritmetičkog niza.

3. Matematičkom indukcijom dokazati da je broj $4^n + 15n - 1$ djeljiv sa 9 za svaki prirodan broj. 22 b

4. U jednom žestokom obračunu među gusarima 70 njih od 100 je izgubilo jedno oko, 75 njih jedno uho, 80 jednu ruku i 85 jednu nogu. Dokazati da je bar 10 gusara izgubilo istovremeno oko, uho, ruku i nogu. 23 b

Napomena: *Vrijeme predviđeno za izradu zadataka je 120 minuta. Dozvoljena je upotreba samo pribora za crtanje i pisanje. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.*

Mnogo uspjeha u radu!

Moguća rješenja zadataka za I razred

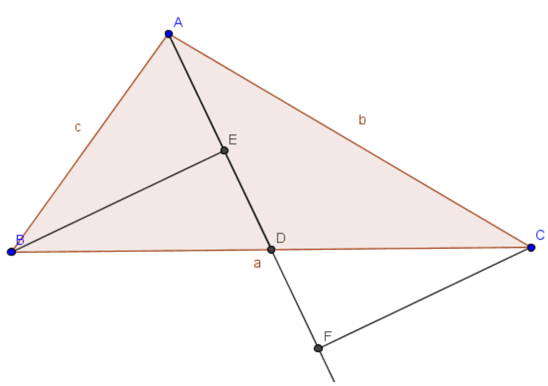
1. Množenjem uslova zadatka $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ sa $xyz \neq 0$, dobijamo $yz + xz + xy = 0$. **(8 b)** $(x+y+z)^2 = (x+y)^2 + 2(x+y)z + z^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$ **(10 b)**, odakle je $x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+xz+yz) = 1$ **(6 b)**. 24 b

2. Neka je x broj zadataka koje Dino nije tačno riješio **(2 b)**. Broj zadataka koje je Dino tačno riješio je $40-x$ **(3 b)**, pa je njegov ukupan broj bodova jednak $15(40-x)-4x$ **(7 b)**. Prema tome treba riješiti jednačinu $15(40-x)-4x=353$ **(2 b)**. Rješenje jednačine je $=13$, dakle Dino nije tačno uradio 13 zadataka **(4 b)**. 18 b

3. Jednačinu $\frac{a-5}{x+1}-\frac{7+3a}{x-2}=\frac{2ax-5}{x^2-x-2}$ dovodimo na oblik $\frac{a-5}{x+1}-\frac{7+3a}{x-2}=\frac{2ax-5}{(x+1)(x-2)}$ **(2 b)**. Množenjem jednačine sa $(x+1)(x-2)\neq 0, x \neq -1\ i\ x \neq 2$ **(3 b)**, dobijamo jednačinu $-4ax-12x-5a+8=0$ **(5 b)**, odakle je $x=\frac{8-5a}{4(a+3)}$ **(3 b)**. 28 b

Za $a=-3$ zadana jednačina nema rješenja **(5 b)**. Iz istih razloga $x=-1\ i\ x=2$ ne mogu biti rješenja, pa za vrijednosti $a=-20\ (za\ x=-1)\ i\ a=-\frac{16}{13}\ (za\ x=2)$ također nema rješenja **(5 b +5 b)**.

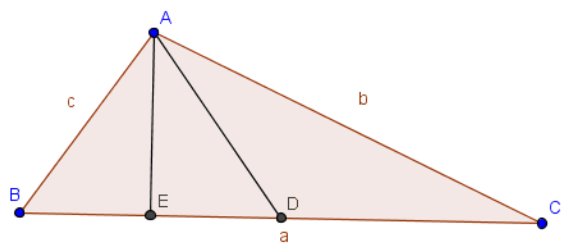
4. Prvo rješenje: Neka je D središte stranice $\overline{BC}$, a tačke E i F podnožja visina iz tačaka B i C na težišnicu t_a. **(6 b)** 30 b



(5 b)

ΔBED $\cong$ ΔCFD pa je $\overline{DE} = \overline{DF} = x$ i $\overline{CF} = \overline{BE} = y$. **(3 b)**
Iz pravouglih trouglova ΔABE i ΔAFC je:
$(t_a - x)^2 + y^2 = c^2$
$(t_a + x)^2 + y^2 = b^2$
Sabiranjem zadnje dvije jednakosti dobijamo $2t_a^2 + 2x^2 + 2y^2 = b^2 + c^2$ **(8 b)**
Iz ΔDFC je $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ **(4 b)**, pa imamo:
$2t_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$, odakle je $t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$. **(4b)**

Drugo rješenje: Neka je $\overline{AD}$ težišnica t_a, $\overline{AE}$ visina h_a i $\overline{ED} = x$.



(6 b)

U ΔAED : $t_a^2 = h_a^2 + x^2$ **(4 b)**

U ΔAEB : $c^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$ **(4 b)**

U ΔAEC: $b^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$ **(4 b)**

Oduzimanjem zadnje dvije jednakosti dobijamo $c^2 - b^2 = -2xa$, odakle je

$x = \frac{b^2 - c^2}{2a}$ **(6 b)**. Oduzimanjem prve dvije jednakosti dobijamo: $t_a^2 = c^2 - \frac{a^2}{4} + ax$ u koju nakon uvrštavanja dobijene vrijednosti $x = \frac{b^2 - c^2}{2a}$ dobijamo traženo rješenje **(6 b).**

Moguća rješenja zadataka za II razred

1. $$\frac{(1+i)^{1986}}{(1-i)^{1986}-(1+i)^{1986}}=\frac{((1+i)^2)^{993}}{((1-i)^2)^{993}-((1+i)^2)^{993}}$$ 18 b

$i^2=-1, (1+i)^2=2i,\ (1-i)^2=-2i,\ i^{993}=i^{4\cdot 248+1}=i$ **(5 b)**

$\frac{\left((1+i)^2\right)^{993}}{((1-i)^2)^{993}-((1+i)^2)^{993}}=\frac{(2i)^{993}}{(-2i)^{993}-(2i)^{993}}=\frac{(2i)^{993}}{-2(2i)^{993}}=-\frac{1}{2}$ **(13 b)**

2. Rješavamo sistem nejednačina: $-3<\frac{x^2-mx+1}{x^2+x+1}<3$, odnosno 28 b

$\frac{x^2-mx+1}{x^2+x+1}>-3 \wedge \frac{x^2-mx+1}{x^2+x+1}<3$ **(3 b)**.

I. $\frac{x^2-mx+1}{x^2+x+1}>-3$

$\frac{x^2-mx+1+3(x^2+x+1}{x^2+x+1}>0,$

$\frac{4x^2+x(3-m)+4}{x^2+x+1}>0,$ pa kako je $x^2+x+1>0$ nejednakost je zadovoljena kada je $4x^2+x(3-m)+4>0$, pa mora biti $a=4>0 \wedge D=m^2-6m-55<0$, odakle je $m\in(-5,11)$. **(10 b)**

II. $\frac{x^2-mx+1}{x^2+x+1}<3,$

$m\in(-7,1)$ **(10 b)**

Konačno rješenje $m\in(-5,1)$ **(5b).**

3. Neka su stranice trougla $n, n+1, n+2$, a površina trougla $n+3$. **(3 b)** 24 b

Koristimo Heronovu formula za računanje površine trougla $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

$$s=\frac{3n+3}{2}=\frac{3(n+1)}{2}$$
$$s-a=\frac{n+3}{2}$$
$$s-b=\frac{n+1}{2}$$
$$s-c=\frac{n-1}{2}$$

Uvrštavanjem u Heronovu formulu dobijamo

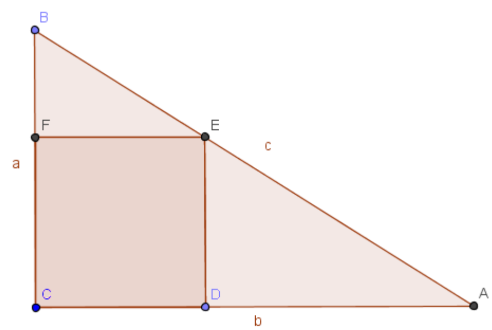
$n+3=\sqrt{\frac{3(n+1)}{2}\cdot\frac{n+3}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}$, odakle kvadriranjem dobijamo

$16(n+3)^2-3(n+1)(n+3)(n^2-1)=0$ **(8 b).**

Faktorizacijom dolazimo do jednačine $(n+3)(-3n^3-3n^2-19n-51)=0$. Daljim rastavljanjem na faktore (Hornerovom shemom ili dijeljenjem polinoma sa $n-3$) dobijamo $(n+3)(n-3)(3n^2+12n+17)=0$. Zaključujemo da je zadnji proizvod jednak nuli samo za $n=3$ **(10 b)**.

Stranice trougla su $a=3, b=4, c=5, P=6$, tzv. Egipatski trougao. **(3 b)**

4. 30 b



U pravouglom trouglu ABC vrijedi $a^2+b^2=35^2=1225$ **(2 b).**

Iz sličnosti trouglova $\Delta ABC \sim \Delta BFD$ **(5 b)** imamo: $a:b=(a-d):d$, odakle je $12(a+b)=ab$ **(8 b)**

Ssitem jednačina $12(a+b)=ab \wedge a^2+b^2=1225$ svodi se na sistem $12(a+b)=ab \wedge (a+b)^2=1225+2\text{ab}$ **(4 b).**

Uvođenjem smjene $a+b=x\ i\ ab=y$ dobijaju se vrijednosti $x_1=49\ i\ y_1=588$ koja uzimamo za rješenja, te vrijednosti $x_2=-25\ i\ y_2=-300$ koja ne mogu biti rješenja **(5 b)**. Za $x_1=49\ i\ y_1=588$ rješavamo sistem $a+b=49\ i\ ab=588$, odakle se dobijaju dužine kateta 21 i 28 **(6 b).**

Moguća rješenja zadataka za III razred

1. $$log_7(6+7^{-x})=x+1$$ 18 b

Definiciono područje $\forall x \in R$ **(1 b)**

$6+7^{-x}=7^{x+1}$ **(4 b)**

$7\cdot 7^{2x}-6\cdot 7^{x}-1=0$, uvođenjem smjene $t=7^{x}$, eksponencijalna jednačina svodi se na kvadratnu jednačinu čija su rješenja $t_1 = 1\ i\ t_2=-\frac{1}{7}$ **(10 b).** Rješenje logaritamske jednačine je $x=0$. **(3 b)**

2. Krenimo od prve jednakosti 27 b

$$3sin^2\alpha+2sin^2\beta=1$$

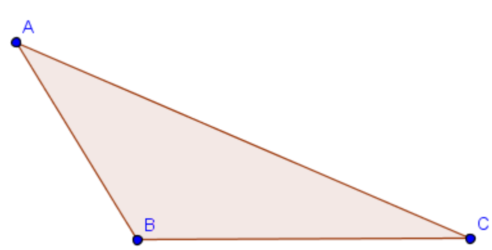
Imamo: $3sin^2\alpha=1-2sin^2\beta=sin^2\beta+cos^2\beta-2sin^2\beta= cos^2\beta-sin^2\beta=cos2\beta$. **(7b)**

Iz $3sin2\alpha-2sin2\beta=0$ dobijamo $sin2\beta=\frac{3}{2}sin2\alpha$. **(7b)**

$\cos(\alpha+2\beta)=cos\alpha cos2\beta-sin\alpha sin2\beta=cos\alpha sin^2\alpha- sin\alpha\frac{3}{2}sin2\alpha=cos\alpha sin^2\alpha-sin\alpha cos\alpha sin\alpha=cos\alpha sin^2\alpha- cos\alpha sin^2\alpha=0$ **(10 b).**

Odavde je $\alpha+2\beta=0$ **(3 b).**

3. Stranice trougla su $x, x+4, x+8$, a kako je ugao 120^o tupi, nasuprot njega se nalazi najduža stranica $x+8$ **(3 b).** 25 b



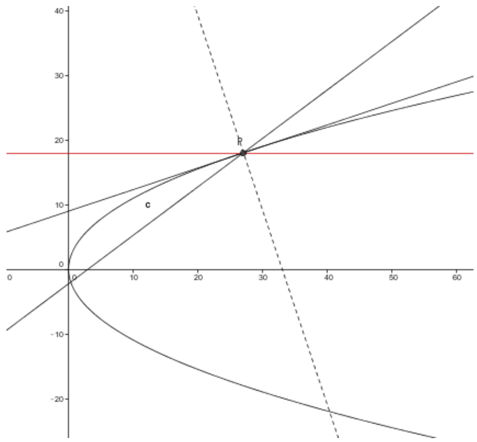
(**2 b**)

Prema kosinusnoj teoremi je $(x+8)^2=x^2+(x+4)^2-2x(x+4)cos120^o$ (**6 b**).

Rješenja zadnje jednačine su $x_1=6\ i\ x_2=-4$, pa su stranice trougla $6{,}10\ i\ 14$. **(10 b)**

Površina trougla je $P = \frac{ab}{2} sin\gamma = \frac{6 \cdot 10}{2} sin120^o = 15\sqrt{3}$. **(4b)**

4. Fokus parabole $y^2 = 12x$ je $F(3,0)$ **(2 b)**. 30 b



slika **(3 b)**

Jednačina prave koja prolazi kroz fokus $F(3,0)$ i sa koeficijentom pravca $k = tg\alpha = \frac{3}{4}$ je $3x - 4y - 9 = 0$ (**3 b**).

Presječnu tačku prave i prabole dobivamo rješavanjem sistema

$$y^2 = 12x$$
$$3x - 4y - 9 = 0$$

Rješevanjem sistema dobiju se dvije tačke $P(27,18)$ i $R(\frac{1}{3}, -2)$, prema uslovu zadatka rješenje je samo tačka P **(5 b)**.

Jednačina tangene parabole u tački $P(27,18)$ glasi $y_1 y = p(x + x_1)$, dakle $y = \frac{1}{3}x + 9$ **(4 b)**. Koeficijent pravca normale na parabola tački P glasi $k_n = -3$ (**3 b**).

Kako upadni zrak, normala i odbojni zrak leže u istoj ravni i pri tome je ugao između upadnog zraka i normale jednak uglu između normale i odbojnog zraka, može se odrediti koeficijent pravca k_o prave na kojoj leži odbijeni zrak na sljedeći način:

$$\frac{k_n - k}{1 + k_n \cdot k} = \frac{k_o - k_n}{1 + k_n \cdot k_o}$$

gdje je $k = \frac{3}{4}$, $k_n = -3$. Koeficijent pravca odbojnog zraka je $k_o = 0$.

Jednačina prave po kojoj se kreće odbojni zrak je $y - 18 = 0(x - 27)$, dakle $y - 18 = 0$ (**10 b**).

Moguća rješenja zadataka za IV razred

1. $n^2 - 15n + 1 = n^2 + 2n + 1 - 2n - 15n = (n+1)^2 - 17n$ **(10 b)** 25 b

Ako je $n+1$ djeljiv sa 17, tada n nije djeljiv sa 17 jer $NZD(n, n+1) = 1$. Zato je $(n+1)^2 - 17n = 17^2k^2 - 17n = 17(17k^2 - n), k \in Z$, pa ovaj broj ne može biti djeljiv sa 289 **(8 b).**

Ako n+1 nije djeljiv sa 17, tada ni $(n+1)^2 - 17n$ nije djeljiv sa 17, pa tim prije ni sa 289. Dakle takav prirodan broj ne postoji **(7 b)**.

2. Prema Vietovim formulama je 30 b

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2p$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -p$$

$$x_1x_2x_3 = -10. \quad \textbf{(5 b)}$$

Ako su x_1, x_2 *i* $x_3$uzastopni članovi aritmetičkog niza, onda je $x_1 = x - d, x_2 = x, x_3 = x + d$,**(3 b)** pa uvrštavanjem u gornje izraze dobijamo:

$$3x = -2p \qquad (1)$$

$$(x-d)x + x(x+d) + (x+d)(x-d) = -p \qquad (2) \qquad \textbf{(3 b)}$$

$$(x-d)x(x+d) = -10 \qquad (3)$$

Iz (1) slijedi $x = \frac{-2p}{3}$, pa uvrštavanjem u (3) dobijamo $x^2 - d^2 = -\frac{10}{x} = \frac{15}{p}$.

Iz(2) imamo $(x-d)x + x(x+d) + \frac{15}{p} = -p$,odakle je $2x^2 = -p - \frac{15}{p}$.

Uvrštavanjem vrijednosti $x = \frac{-2p}{3}$ **(3 b)** u posljednju jednačinu dobija se jednačina trećeg stepena $8p^3 + 9p^2 + 135 = 0$ ($\mathbf{10\ b}$). Tražimo cjelobrojna rješenja ove jednačine, a to moraju biti djeljitelji broja 135. Jedno rješenje jednačine je $p = -3$.

$(8p^3 + 9p^2 + 135):(p+3) = 8p^2 - 15p + 45.$ Kvadratna jednačina $8p^2 - 15p + 45 = 0$ nema realna rješenja, pa za $p = -3$ je $x = 2$, a iz

$x^2 - d^2 = -5$, je $d = \pm 3$. Rješenja jednačine su $-1, 2\ i\ 5$, a jednačina glasi $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$ ($\boldsymbol{6\ b}$).

3. Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi jer je $4 + 15 - 1 = 18$. **(2 b)** 22 b

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. neka je $4^k + 15k - 1 = 9N$. **(3 b)**

Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$, odnosno da je $4^{k+1} + 15(k+1) - 1$ djeljivo sa 9.

$$\begin{aligned} 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 &= 4 \cdot 4^k + 15k + 15 - 1 \\ &= 4 \cdot 4^k + \boldsymbol{4 \cdot 15k - 4 - 4 \cdot 15k + 4} + 15k + 15 - 1 \\ &= 4(4^k + 15k - 1) + 18 - 45k \\ &= 4 \cdot 9N + 9(2 - 5k) \end{aligned}$$

Dakle tvrdnja vrijedi i za n=k+1. **(15 b)**

Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da je tvrdnja tačna za svaki prirodan broj n. **(2 b)**

4. Oko i uho izgubilo je bar $(70 + 75) - 100 = 45$ gusara. **(7 b)** 23 b

Oko, uho i ruku izgubilo je bar $(45 + 80) - 100 = 25$ gusara **(8 b)**

Oko, uho, ruku i nogu izgubilo je bar $(25 + 85) - 100 = 10$ gusara **(8 b).**