KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
I RAZRED

Srednjobosanski kanton, školska 2012/13. godina

1. Riješiti sistem jednačina:
$$\frac{ab}{a+b}=2$$
$$\frac{ac}{a+c}=5$$
$$\frac{bc}{b+c}=4.$$
2. U trouglu ABC je $\angle BAC=60^0$. Ako je M središte stranice $\overline{BC}$, N podnožje visine datog trougla iz vrha B, a P podnožje visine iz vrha C, dokazati da je MNP jednakostranični trougao.
3. Dokazati da za sve realne nenegativne brojeve a,b,c važi nejednakost: $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ca(c+a-2b)\geq 0.$
4. Dokazati da je zadnja cifra (cifra jedinica) broja 7^{10000} broj 1.

Rješenja zadataka za I razred

1. Sistem je definisan samo za realne brojeve *a*, *b*, *c* za koje je $a+b\neq 0\wedge b+c\neq 0\wedge c+a\neq 0.$ Može se odmah uočiti da, ako je neka od promjenljivih *a*, *b* ili *c* jednaka nuli, sistem nema rješenja.

Prvi način: Ako uzmemo recipročne vrijednosti na obje strane u sve tri jednačine, dobićemo:

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{2}\wedge\frac{a+c}{ac}=\frac{1}{5}\wedge\frac{b+c}{bc}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\wedge\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{1}{5}\wedge\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{4}.$$

Saberemo sve tri jednačine, pa ćemo dobiti:

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{19}{40}.$$

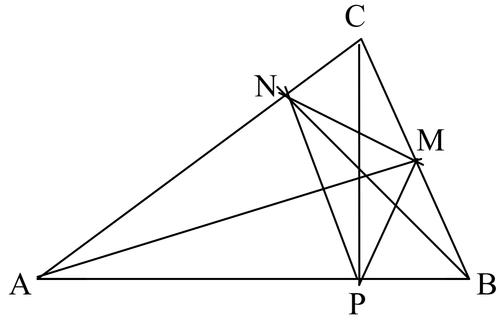
Poredeći sa prvom, odnosno drugom, odnosno trećom jednačinom u sistemu dobijamo redom da je $\frac{1}{c}=-\frac{1}{40}\wedge\frac{1}{b}=\frac{11}{40}\wedge\frac{1}{a}=\frac{9}{40}$, odnosno $(a,b,c)=\left(\frac{40}{9},\frac{40}{11},-40\right).$

Drugi način: Ako se oslobodimo razlomaka u sve tri jednačine, imamo da je $ab=2a+2b\wedge ac=5a+5c\wedge bc=4b+4c.$

Iz prve jednačine se dobije da je $a=\frac{2b}{b-2}$, a iz treće je $c=\frac{4b}{b-4}.$ Kad zamijenimo *a* i *c* preko *b* u drugu jednačinu dobije se da je $\frac{8b^2}{(b-2)(b-4)}=\frac{10b}{b-2}+\frac{20b}{b-4}.$

Uz pretpostavku da $b\notin\{2,4\}$ pomnožimo jednačinu sa $(b-2)(b-4)$, pa se nakon sređivanja dobije $22b^2-80b=0.$ Pošto znamo da ne može biti $b=0,$ podijelimo jednačinu sa *b* i dobijemo da je $b=\frac{40}{11}.$ Nakon toga se lako dobije da je $a=\frac{40}{9}$ i $c=-40.$

2. Konstruišimo kružnicu sa centrom u tački *M*, poluprečnika $r=\overline{CM}=\overline{MB}.$ Tada se zaključuje da i tačke *N* i *P* leže na toj kružnici, jer je periferijski ugao nad prečnikom pravi i jer su uglovi *BNC* i *CPB* pravi. Pošto je $\overline{MN}=\overline{MP}=r,$ trougao *MNP* je jednakokraki. U trouglu *ABN* je $\angle BAN=60^0$, $\angle ANB=90^0.$ Zato je $\angle ABN=30^0,$ a to je periferijski ugao nad lukom *NP*.



Pošto je ugao *NMP* centralni ugao nad tim lukom, taj ugao inosi 60^0. Dakle, trougao *MNP* je jednakokraki trougao kome je jedan unutrašnji ugao 60^0 pa se lako zaključuje da su i ostali uglovi 60^0, što znači da je trougao *MNP* jednakostranični.

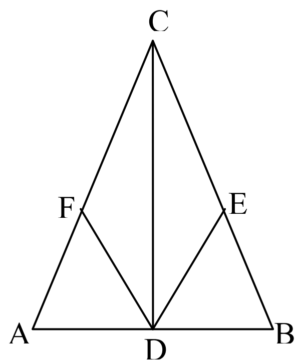
3. $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ca(c+a-2b)=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \geq 0.$
4. Ako se pomnože dva broja čija je cifra jedinica (tj. zadnja cifra) 1, dobije se takođe broj čija je zadnja cifra 1. Pošto je $7^4=2401$ i $7^{10000}=\left(7^4\right)^{2500}=2401^{2500}$, tvrdnja očigledno važi.

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
II RAZRED
Srednjobosanski kanton, školska 2012/13. godina

1. Odrediti vrijednost parametra k tako da zbir recipročnih vrijednosti nula kvadratne funkcije $y=(k-1)x^2-2(k+1)x+2k-1$ bude veći od $\frac{1}{2}$.
2. U trouglu ABC simetrala ugla ACB siječe stranicu $\overline{AB}$ u tački D. Ako je $\overline{AC}+\overline{BD}=\overline{BC}+\overline{AD}$, dokazati da je trougao ABC jednakokraki.
3. Riješiti jednačinu $x\cdot 2^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\cdot 2^{x}=4$.
4. Izračunati $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^6$, ako je i imaginarna jedinica.

Rješenja zadataka za II razred

1. Neka su x_1 i x_2 nule kvadratne funkcije. Tada je $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}>\frac{1}{2}$. Prema Vietovim formulama dobijemo: $x_1+x_2=\frac{2(k+1)}{k-1}$ i $x_1x_2=\frac{2k-1}{k-1}$. Otuda je $\frac{2k+2}{2k-1}>\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{2k+2}{2k-1}-\frac{1}{2}>0\Rightarrow\frac{2k+5}{4k-2}>0.$
   Konačno se dobije: $k\in\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.
2. **Prvi način:** Označimo dužine stranica trougla, prema standardnoj notaciji, sa *a*, *b*, *c*. Neka je dužina duži $\overline{AD}$ jednaka *x*. Tada je dužina duži $\overline{BD}$ jednaka $c-x$. Ako iskoristimo osobinu simetrale ugla u trouglu imamo da je $\frac{x}{c-x}=\frac{b}{a}$. Odatle se dobije da je $x=\frac{bc}{a+b}$ i $c-x=\frac{ac}{a+b}$. Iz zadanog uslova onda slijedi da je $b+\frac{ac}{a+b}=a+\frac{bc}{a+b}\Rightarrow b(a+b)+ac=a(a+b)+bc.$
   Poslije sređivanja se dobije: $b^2-a^2+ac-bc=0\Rightarrow(b-a)(b+a)-c(b-a)=0,$ tj. $(b-a)(b+a-c)=0,$ a odatle je $b=a$ ili $b+a=c.$ Ali znamo da je u svakom trouglu zbir dvije stranice veći od treće, pa je dakle $a=b$ i trougao je zato jednakokraki.



Drugi način: Pošto je ugao *CDB* vanjski u trouglu *ADC*, imamo da je taj ugao veći od ugla $\angle ACD=\angle BCD.$ Zato je $\overline{BC}>\overline{DB},$ pa na duži $\overline{BC}$ možemo naći tačku *E*, takvu da je $\overline{BD}=\overline{BE}.$ Analogno, $\overline{AC}>\overline{AD},$ pa se na duži $\overline{AC}$ može naći tačka *F*, tako da je $\overline{AD}=\overline{AF}.$ Iz $\overline{AC}+\overline{BD}=\overline{BC}+\overline{AD},$ slijedi: $\overline{AC}-\overline{AF}=\overline{BC}-\overline{BE},$ tj. $\overline{CF}=\overline{CE}.$ Sada je lako dokazati podudarnost troglova *DCF* i *DEC*, pa je $\overline{DF}=\overline{DE}$ i $\angle CFD=\angle CED.$ To dalje povlači podudarnost trouglova *AFD* i *DBE*, a otuda je $\angle CAB=\angle ABC,$ pa je trougao *ABC* jednakokraki.

3. Ako je $x<0,$ lijeva strana jednačine je negativan broj. Dakle, $x>0,$ uzimajući u obzir da je $x\neq 0$ zbog definisanosti izraza u jednačini. Prema odnosu aritmetičke i geometrijske sredine je $a+b\geq 2\sqrt{ab}\ (a>0,b>0)$. Jednakost važi ako i samo ako je

$a=b.$ Iz $x\cdot 2^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\cdot 2^{x}\geq 2\sqrt{x\cdot 2^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot 2^{x}}=2\sqrt{2^{x+\frac{1}{x}}}$ i $x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$ slijedi:

$x\cdot 2^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\cdot 2^{x}\geq 2\sqrt{2^{2}}=4.$

Jednakost važi ako je $x\cdot 2^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\cdot 2^{x}=2\Rightarrow 2^{\frac{1}{x}}=\frac{2}{x}\wedge 2^{x}=2x.$

Ako pomnožimo zadnje dvije jednačine slijedi:

$2^{x+\frac{1}{x}}=4=2^{2}\Rightarrow x+\frac{1}{x}=2\Rightarrow x^{2}+1=2x\Rightarrow (x-1)^{2}=0\Rightarrow x=1.$

4. $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^{2}=2+\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot i\sqrt{2-\sqrt{2}}+i^{2}\left(2-\sqrt{2}\right)=$

$=2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2}+2i\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}=2\sqrt{2}\left(1+i\right).$

Slijedi:

$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^{6}=\left(2\sqrt{2}\right)^{3}\left(1+i\right)^{3}=8\cdot 2\sqrt{2}\left(1+3i+3i^{2}+i^{3}\right)=16\sqrt{2}\left(1+3i-3-i\right)$

$=16\sqrt{2}\left(-2+2i\right)=32\sqrt{2}\left(i-1\right).$

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE

III RAZRED

Srednjobosanski kanton, školska 2012/13. godina

1. U trouglu *ABC* jedna stranica je dugačka 9 cm, druga je dužine 5 cm, a ugao nasuprot treće stranice jednak je polovini razlike uglova koji leže nasuprot poznatih stranica. Izračunati nepoznatu stranicu datog trougla i njegovu površinu.
2. Stranice trougla leže na pravima čije su jednačine u koordinatnom sistemu: $y+8=0,\ 3x-4y+7=0,\ 4x+3y-24=0.$ Naći jednačinu upisane kružnice tog trougla.
3. Dokazati da je nejednakost $\frac{\sin x-1}{\sin x-2}+\frac{1}{2}\geq\frac{2-\sin x}{3-\sin x}$ tačna za sve realne brojeve *x*.
4. Odrediti sve vrijednosti parametra a za koje jednačina $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x+a=0$ nema rješenja.

Rješenja zadataka za III razred

1. Prvi način:

Uz standardno označavanje stranica i uglova u trouglu, možemo napisati da je $a=9,\ b=5, \alpha-\beta=2\gamma.$ Iz jednakosti $\alpha=\beta+2\gamma$ i $\alpha+\beta+\gamma=180^0$ slijedi da je $\beta=90^0-\frac{3\gamma}{2}$ i $\alpha=90^0+\frac{\gamma}{2}.$

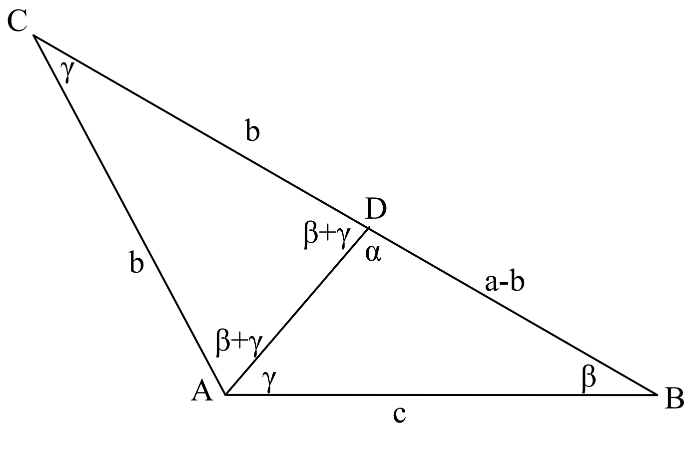
Otuda je $\sin\beta=\sin\left(90^0-\frac{3\gamma}{2}\right)=\cos\frac{3\gamma}{2}$ i $\sin\alpha=\sin\left(90^0+\frac{\gamma}{2}\right)=\cos\alpha=\cos\frac{\gamma}{2}.$ Zatim po sinusnoj teoremi slijedi:

$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\Rightarrow\frac{9}{5}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{3\gamma}{2}}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}\left(4\cos^2\frac{\gamma}{2}-3\right)},$ a odatle se direktno dobije

$\cos^2\frac{\gamma}{2}=\frac{8}{9}\Rightarrow\sin^2\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{9}\Rightarrow\cos\gamma=\cos^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2}=\frac{7}{9}.$

Najzad, koristeći kosinusnu teoremu, imamo da je $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma=81+25-2\cdot9\cdot5\cdot\frac{7}{9}=36,$ znači $c=6\,cm.$ Površinu trougla možemo dobiti po formuli $P=\frac{bc}{2}\sin\alpha,$ jer znamo da je $\sin\alpha=\cos\frac{\gamma}{2},$ a $\cos^2\frac{\gamma}{2}=\frac{8}{9}\Rightarrow\cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3},$ dakle $P=\frac{5\cdot6}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=10\sqrt{2}.$

Drugi način:



Neka je D tačka na stranici $\overline{BC},$ tako da je $\angle BAD=\gamma.$ Obzirom da je $\alpha=\beta+2\gamma$ slijedi da je $\angle DAC=\beta+\gamma,$ pa je i $\angle ADC=\beta+\gamma,$ jer je $2\beta+3\gamma=180^0.$ Očito je trougao ADC jednakokraki, znači $\overline{AC}=\overline{DC}=b,$ dok je $\overline{DB}=a-b.$

Trouglovi ABD i ABC su slični, pa je $\frac{c}{a}=\frac{a-b}{c}\Rightarrow c^2=a^2-ab=81-45=36.$ Dakle, $c=6\,cm.$ Površinu trougla možemo izračunati po Heronovoj formuli. Najprije, $s=\frac{9+5+6}{2}=10,$ pa je $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{10\cdot1\cdot5\cdot4}=\sqrt{5^2\cdot2^2\cdot2}=10\sqrt{2}.$

2. Prvi način:

Stranice trougla su tangente tražene kružnice. Da bi prava $y = kx + n$ bila tangenta kružnice $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ potrebno je da vrijedi uslov dodira $r^2\left(k^2+1\right) = (q-kp-n)^2$.

U slučaju prave $y + 8 = 0$ je $k_1 = 0,\ n_1 = -8,$ pa iz uslova dodira slijedi

$(1)\ r^2 = (q+8)^2 \Rightarrow r = q+8 \vee r = -(q+8).$

Za pravu $3x - 4y + 7 = 0$ je $k_2 = \frac{3}{4},\ n_2 = \frac{7}{4},$ pa je

$(2)\ 25r^2 = (4q-3p-7)^2 \Rightarrow 5r = 4q-3p-7 \vee 5r = -4q+3p+7$

Za pravu $4x + 3y - 24 = 0$ je $k_3 = -\frac{4}{3},\ n_3 = 8,$ pa je

$(3)\ 25r^2 = (3q+4p-24)^2 \Rightarrow 5r = 3q+4p-24 \vee 5r = -3q-4p+24.$

Sada kombinujući linearne jednačine iz (1), (2) i (3) tražimo p, q i r, ali tako da je $r > 0.$ Dobija se jedino rješenje $p = 2,\ q = -3,\ r = 5.$ Jednačina tražene kružnice glasi $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25.$

Drugi način:

Centar upisane kružnice u trouglu nalazi se u presjeku simetrala unutrašnjih uglova. Uzimajući u obzir da se koordinatni početak nalazi unutar trougla, jednačina simetrale ugla kojeg određuju prave $y + 8 = 0$ i $3x - 4y + 7 = 0$ glasi:

$$\frac{y+8}{-1} - \frac{3x-4y+7}{-5} = 0 \Rightarrow 3x - 9y = 33 \Rightarrow x - 3y = 11.$$

Jednačina simetrale ugla kojeg određuju prave $y + 8 = 0$ i $4x + 3y - 24 = 0$ glasi:

$$\frac{y+8}{-1} - \frac{4x+3y-24}{5} = 0 \Rightarrow -4x - 8y = 16 \Rightarrow x + 2y = -4.$$

Iz sistema jednačina $x - 3y = 11 \wedge x + 2y = -4$ lako se nađe da je $(x, y) = (2, -3).$ Dakle, $p = 2, q = -3.$ Poluprečnik r možemo naći kao udaljenost tačke $S(2,-3)$ od prave $y + 8 = 0,$ $r = \frac{-3+8}{1} = 5.$ Jednačina tražene kružnice je $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25.$

3. $\frac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + \frac{1}{2} \geq \frac{2 - \sin x}{3 - \sin x} \Leftrightarrow \frac{1 - \sin x}{2 - \sin x} + \frac{1}{2} \geq \frac{2 - \sin x}{3 - \sin x}.$

Pošto je $2 - \sin x > 0$ i $3 - \sin x > 0$ za sve realne x, datu jednačinu možemo pomnožiti sa $2(2 - \sin x)(3 - \sin x),$ tako da je polazna nejednakost ekvivalentna sa:

$$2(1-\sin x)(3-\sin x) + (2-\sin x)(3-\sin x) \geq 2(2-\sin x)^2$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2\sin x - 6\sin x + 2\sin^2 x + 6 - 2\sin x - 3\sin x + \sin^2 x \geq 8 - 8\sin x + 2\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - 5\sin x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (1-\sin x)(4-\sin x) \geq 0.$$

Posljednja nejednakost očigledno važi za sve realne x, jer su oba faktora nenegativna. Jednakost se dostiže ako je $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}.$

4. $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0$

$\Rightarrow \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x + \sin 2x + a = 0$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \sin 2x + a = 0 \Rightarrow \sin^2 2x - 2\sin 2x - 2a - 2 = 0.$

Uzmimo smjenu $\sin 2x = t.$ Tada je $t^2 - 2t - 2a - 2 = 0.$ Diskriminanta ove jednačine je $D = 4 - 4(-2a - 2) = 8a + 12 = 4(2a + 3).$

Ako je $a < -\frac{3}{2} \Rightarrow D < 0,$ pa data jednačina nema realnih rješenja.

Ako je $a \geq -\frac{3}{2},$ tada je $t_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2a+3}}{2} = 1 \pm \sqrt{2a+3},$ znači $\sin 2x = 1 \pm \sqrt{2a+3}.$

Pošto je $1 + \sqrt{2a+3} \geq 1,$ iz $\sin 2x = 1 + \sqrt{2a+3}$ možemo dobiti realna rješenja samo ako je $1 + \sqrt{2a+3} = 1 \Leftrightarrow 2a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}.$

S druge strane, $1 - \sqrt{2a+3} \leq 1$ za sve $a \geq -\frac{3}{2},$ pa jednačina $\sin 2x = 1 - \sqrt{2a+3}$ nema realnih rješenja ako je $1 - \sqrt{2a+3} < -1.$ Ova nejednačina je ekvivalentna sa $2 < \sqrt{2a+3} \Rightarrow 4 < 2a + 3 \Rightarrow 1 < 2a \Rightarrow a > \frac{1}{2}.$

Ukupno, zaključujemo da polazna jednačina nema realnih rješenja ako je $a < -\frac{3}{2}$ ili $a > \frac{1}{2}$, tj. $a \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE
IV RAZRED
Srednjobosanski kanton, školska 2012/13. godina

1. Dokazati da je broj $3n^4-14n^3+21n^2-10n$ djeljiv brojem 12 za svaki prirodni broj n.
2. Dat je kompleksni broj $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Izračunati sve vrijednosti korjena $\sqrt[3]{\left(z+\frac{1}{z}+i\right)^5}$.
3. Ako dužine stranica nekog trougla čine geometrijsku progresiju, dokazati da je trougao čije su dužine stranica jednake dužinama visina polaznog trougla sličan polaznom trouglu.
4. Izračunati $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2+n)^{100}-n^{100}-200n^{99}}{n^{98}-100n^2+1}$.

Rješenja zadataka za IV razred

1. Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom.
   $n=1 \Rightarrow 3n^4-14n^3+21n^2-10n=0,$ dakle tvrdnja je tačna za $n=1.$

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za neki prirodni broj $k>1,$ tj. $3k^4-14k^3+21k^2-10k=12m, m\in\mathbb{N}.$

Tada je $3(k+1)^4-14(k+1)^3+21(k+1)^2-10(k+1)=$

$=3\left(k^4+4k^3+6k^2+4k+1\right)-14\left(k^3+3k^2+3k+1\right)+21\left(k^2+2k+1\right)-10k-10=$

$=\left(3k^4-14k^3+21k^2-10k\right)+12k^3-24k^2+12k,$

pa imajući u vidu pretpostavku slijedi:

$3(k+1)^4-14(k+1)^3+21(k+1)^2-10(k+1)=12m+12\left(k^3-2k^2+k\right)=12\left(m+k^3-2k^2+k\right),$

što znači da je broj $3n^4-14n^3+21n^2-10n$ djeljiv brojem 12 i ako je $n=k+1.$ Prema principu potpune matematičke indukcije slijedi da je broj $3n^4-14n^3+21n^2-10n$ djeljiv brojem 12 za sve prirodne brojeve *n*.

2. $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\Rightarrow\frac{1}{z}=\cos\frac{5\pi}{3}-i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$

ili možemo to isto dobiti ovako:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{3}{4}i^2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dalje slijedi: $\sqrt[3]{\left(z+\frac{1}{z}+i\right)^5}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+i\right)^5}=\sqrt[3]{(1+i)^5}.$

Pošto je $(1+i)^5=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^5=\sqrt{2^5}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right),$ slijedi:

$$\sqrt[3]{\left(z+\frac{1}{z}+i\right)^5}=\sqrt[3]{\sqrt{2^5}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}\right), k\in\{0,1,2\}.$$

Ako je $k=0,$ dobija se prva vrijednost korjena

$$w_1=\sqrt[6]{2^5}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}}{3}\right)=\sqrt[6]{32}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$

$$=\sqrt[6]{32}\left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right]=\sqrt[6]{32}\cdot\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}+i\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)=2\sqrt[3]{2}\,\frac{\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$$

$$=\sqrt[3]{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}.$$

Ako je $k=1,$ dobijamo

$$w_2=\sqrt[6]{2^5}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{32}\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)\right]=$$

$$=-\sqrt[6]{32}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=-\sqrt[6]{32}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}.$$

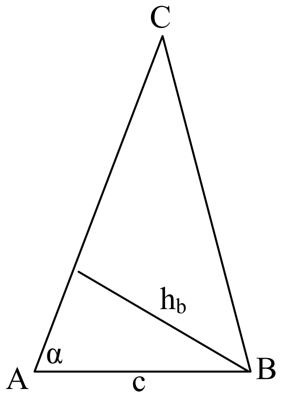
Ako je $k=2,$ dobijamo

$$w_3=\sqrt[6]{2^5}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+4\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{32}\left[\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$

$$=\sqrt[6]{32}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2\sqrt[3]{2}\left(1-i\right)}{2}=\sqrt[3]{2}\left(1-i\right).$$

3. Neka su *a*, *b*, *c* dužine stranica trougla, a $h_a,\ h_b, h_c$ dužine odgovarajućih visina trougla i neka je $b^2=ac.$ Koristeći kosinusnu teoremu imamo:

$$a\cos\gamma+c\cos\alpha=a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2+b^2-c^2+b^2+c^2-a^2}{2b}=b.$$



Otuda je $b^2=b\left(a\cos\gamma+c\cos\alpha\right)=ac,$ pa dijeleći ovu jednakost sa *a* slijedi:

$$b\left(\cos\gamma+\frac{c}{a}\cos\alpha\right)=c.$$

Prema sinusnoj teoremi je $\frac{c}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},$ što povlači

$$b\left(\cos\gamma+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cos\alpha\right)=c\Rightarrow b\left(\cos\gamma\sin\alpha+\sin\gamma\cos\alpha\right)=c\sin\alpha$$

$$\Rightarrow b\sin\left(\alpha+\gamma\right)=c\sin\alpha.$$

Pošto je $\sin\left(\alpha+\gamma\right)=\sin\left(180^0-\beta\right)=\sin\beta,$ imamo da je

$b\sin\beta = c\sin\alpha \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{c\sin\alpha}{b} = \dfrac{h_b}{b}$. Pri tome je iskorišteno da je $\sin\alpha = \dfrac{h_b}{c}$, što se vidi sa slike. Analogno je $h_a = b\sin\gamma$ i $h_c = b\sin\alpha$.

S druge strane, iz sinusne teoreme je $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a} = \dfrac{h_c}{a}$ i $\sin\beta = \dfrac{b\sin\gamma}{c} = \dfrac{h_a}{c}$.

Dakle, $\sin\beta = \dfrac{h_b}{b} = \dfrac{h_c}{a} = \dfrac{h_a}{c}$, što dokazuje postavljenu tvrdnju.

4. $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2+n)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 100n^2 + 1} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{100} + 100\cdot n^{99}\cdot 2 + \binom{100}{2} n^{98}\cdot 2^2 + \ldots + 2^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 100n^2 + 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{100\cdot 99}{2} n^{98}\cdot 2^2 + \binom{100}{3} n^{97}\cdot 2^3 + \ldots + 2^{100}}{n^{98} - 100n^2 + 1}.$$

Ako ovaj razlomak skratimo sa n^{98}, očito u brojniku i nazivniku svi sabirci izuzev prvog će težiti ka nuli kad $n \to \infty$, tako da je $L = 100\cdot 99\cdot 2 = 19800$.