BOSNA I HERCEGOVINA
FEDERACIJA BOSNE I HERCEGOVINE
SREDNJOBOSANSKI KANTON
MINISTARSTVO OBRAZOVANJA, NAUKE, KULTURE I SPORTA

KANTONALNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA

Elči Ibrahim-pašina medresa u Travniku

17.03.2018. godine

Zadaci za prvi razred

17.3.2018. godine

Zadatak 1

Odrediti sve cijele brojeve n takve da je $n^2 + 2n + 2018$ potpun kvadrat.

Zadatak 2

Pretpostavimo da su a, b i c po parovima relativno prosti cijeli brojevi takvi da je

$$\frac{a}{b+c} = 2 \text{ i } \frac{b}{a+c} = 3.$$

Odrediti vrijednost $|c|$. Za dva broja kažemo da su relativno prosti ukoliko je njihov NZD jednak jedinici, te za tri broja kažemo da su po parovima relativno prosti ukoliko je NZD za svaka dva jednak jedinici.

Zadatak 3

Prirodni brojevi od 1 do 16 zapisani su u kvadratiće tabele 4×4. Sabrani su brojevi za svaku kolonu. Ukoliko je jedna suma veća od preostale tri, označimo je sa S.

a) Navedite primjer tabele za $S = 40$.
b) Koja je najmanja vrijednost za S?

Zadatak 4

Neka je D tačka na stranici $\overline{AC}$ trougla ABC i neka D leži između A i C. Upisani krugovi u trouglove ABD, BCD i ABC dodiruju $\overline{CA}$ u F, K i H, redom. Dokazati da je $|\overline{DF}| = |\overline{KH}|$.

Svaki zadatak nosi 25 bodova.
Vrijeme za izradu zadataka je 120 minuta.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.

Sretno!

Rješenja zadataka za prvi razred

Zadatak 1

Odrediti sve cijele brojeve n takve da je $n^2 + 2n + 2018$ potpun kvadrat.

Rješenje. Trebamo riješiti jednačinu

$$n^2 + 2n + 2018 = k^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Drugačije zapisano

$$(n+1)^2 + 2017 = k^2.$$

Sada vrijedi

$$k^2 - (n+1)^2 = 2017$$

i

$$\big(k - (n+1)\big) \cdot \big(k + (n+1)\big) = 2017.$$

Kako je 2017 prost broj, to imamo ukupno četiri mogućnosti:

i. $k - n - 1 = 1 \wedge k + n + 1 = 2017.$
ii. $k - n - 1 = 2017 \wedge k + n + 1 = 1.$
iii. $k - n - 1 = -1 \wedge k + n + 1 = -2017.$
iv. $k - n - 1 = -2017 \wedge k + n + 1 = -1.$

Rješavanjem sistema jednačina, dobijamo rješenja:

i. $k = 1009, n = 1007.$
ii. $k = 1009, n = -1009.$
iii. $k = -1009, \;\; n = -1009.$
iv. $k = -1009, n = 1007.$

Zadatak 2

Pretpostavimo da su a, b i c po parovima relativno prosti cijeli brojevi takvi da je

$$\frac{a}{b+c} = 2 \text{ i } \frac{b}{a+c} = 3.$$

Odrediti vrijednost $|c|$. Za dva broja kažemo da su relativno prosti ukoliko je njihov NZD jednak jedinici, te za tri broja kažemo da su po parovima relativno prosti ukoliko je NZD za svaka dva jednak jedinici.

Rješenje. Dati uslovi se mogu napisati kao:

$$a = 2b + 2c$$

$$b = 3a + 3c.$$

Uvršavanjem prve jednačine u drugu, dobijamo

$$b = 3(2b + 2c) + 3c.$$

Iz toga vrijedi da je

$$b = 6b + 6c + 3c.$$

Sada je

$$b = -\frac{9}{5}c.$$

Također, kako vrijedi da je

$$a = 2b + 2c,$$

imamo da je

$$a = -\frac{18c}{5} + 2c = -\frac{8}{5}c.$$

Kako su a, b i c cijeli brojevi , to mora $5|c$. Ukoliko c ima bilo koji drugi prost faktor, onda će taj faktor dijeliti a i b, što se ne može desiti, jer su brojevi relativno prosti po uslovu zadatka. Dakle, $|c| = 5$.

Zadatak 3

Prirodni brojevi od 1 do 16 zapisani su u kvadratiće tabele 4×4. Sabrani su brojevi za svaku kolonu. Ukoliko je jedna suma veća od preostale tri, označimo je sa S.

a) Navedite primjer tabele za $S = 40$.
b) Koja je najmanja vrijednost za S?

Rješenje.

a) Primjer je prikazan na slici ispod.

1	2	3	10
8	7	6	5
9	4	11	12
16	15	14	13

b) Na ploči su brojevi od 1 do 16 i njihova suma je 136. Kako je 136 jednako $4 \cdot 34$, to znači da su ili sve sume u kolonama jednake 34 ili postoji neka suma veća od tog broja. U prvom slučaju, S ne postoji, dok je u drugom slučaju najmanja vrijednost za $S = 35$. Za $S = 35$ možemo konstruisati primjer, kao na slici ispod.

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	13	14

Zadatak 4

Neka je D tačka na stranici $\overline{AC}$ trougla ABC i neka D leži između A i C. Upisani krugovi u trouglove ABD, BCD i ABC dodiruju $\overline{CA}$ u F, K i H, redom. Dokazati da je $|\overline{DF}| = |\overline{KH}|$.

Rješenje. Koristimo poznatu činjenicu da je udaljenost vrha trougla X od dodirne tačke upisane kružnice u trougao jednak $s - x$, gdje je s poluobim i x je dužina stranica nasuprot vrha X. Tvrdnja se jednostavno dokazuje koristeći činjenicu da su tangentne duži iz jedne tačke na kružnicu jednake.

Primijenimo ovu činjenicu na svaki od tri trougla BCD, ABC i ABC. Koristimo oznake $a = |\overline{BC}|$, $b = |\overline{AC}|$ i $c = |\overline{AB}|$, te $x = |\overline{CD}|$, $y = |\overline{DA}|$ i $z = |\overline{BD}|$.

Sada imamo

$$|\overline{KD}| = \frac{z + x + a}{2} - a = \frac{z + x - a}{2}.$$

$$|\overline{KF}| = \frac{c + y + z}{2} - z = \frac{c + y - z}{2}.$$

$$|\overline{HA}| = \frac{a + b + c}{2} - a = \frac{b + c - a}{2}.$$

Koristeći da je $b = x + y$, napisane jednakosti impliciraju

$$|\overline{HF}| = |\overline{HA}| - |\overline{FA}| = \frac{b + c - a}{2} - \frac{c + y - z}{2} = \frac{x + z - a}{2} = |\overline{KD}|.$$

Dakle, $|\overline{KH}| = |\overline{KF}| - |\overline{HF}| = |\overline{KF}| - |\overline{KD}| = |\overline{DF}|$, kao što se i tražilo.

Zadaci za drugi razred

17.3.2018. godine

Zadatak 1

Svaki od prirodnih brojeva $1,2,3,\dots,31$ napisan je na jednoj karti. Adnan i Ivan biraju po 15 karata. Uočili su da je suma na Adnanovim kartama tačno tri puta veća od sume na Ivanovim kartama. Odrediti koji je broj zapisan na karti koju nijedan igrač nije izabrao?

Zadatak 2

Riješiti jednačinu po x u skupu realnih brojeva

$$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}.$$

Zadatak 3

Dat je paralelogram $ABCD$. Označimo sa M sredinu segmenta $\overline{AD}$, a sa P podnožje okomice iz tačke B na $\overline{CM}$. Dokazati da je $|\overline{AP}|=|\overline{AB}|$.

Zadatak 4

Pozitivni cijeli brojevi m i n su takvi da je $m^{2018}+m+n^2$ djeljivo sa mn. Dokazati da je m potpun kvadrat.

Svaki zadatak nosi 25 bodova.
Vrijeme za izradu zadataka je 120 minuta.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.

Sretno!

Rješenja zadataka za drugi razred

Zadatak 1

Svaki od prirodnih brojeva $1,2,3,\dots,31$ napisan je na jednoj karti. Adnan i Ivan biraju po 15 karata. Uočili su da je suma na Adnanovim kartama tačno tri puta veća od sume na Ivanovim kartama. Odrediti koji je broj zapisan na karti koju nijedan igrač nije izabrao?

Rješenje. Najmanji zbir karata koje jedan igrač može izabrati jednak je

$$1+2+3+\cdots+15=120.$$

Pretpostavimo da igrač uzima najveće ponuđene karte. Dakle, najveći mogući zbir karata koje jedan igrač može uzeti, jednak je

$$31+30+29+\cdots+17=360.$$

Kako je po uslovu zadatka zbir na Adnanovim kartama tačno tri puta veći od sume na Ivanovim kartama, jedina opcija jeste da je Ivan uzeo prvih 15, a Adnan posljednjih 15 karata.

Dakle, 16 je jedina karta koju igrači nisu uzeli.

Zadatak 2

Riješiti jednačinu po x u skupu realnih brojeva

$$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}.$$

Rješenje. Kvadrirajmo početnu jednačinu. Dobijamo

$$x^2+x+1+\frac{1}{x^2}+2\sqrt{(x^2+x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=x+3.$$

Data se jednakost svodi na

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2\sqrt{(x^2+x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=2.$$

Kako je poznato da vrijedi

$$x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2$$

(AG nejednakost), to imamo da vrijedi

$$2=x^2+\frac{1}{x^2}+2\sqrt{(x^2+x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\geq 2+2\sqrt{(x^2+x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}.$$

Dakle

$$2\sqrt{(x^2+x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=0,$$

te

$$x^2=\frac{1}{x^2}.$$

Sada imamo da je $x^4=1$, tj. $x=\pm 1$.

Jednostavnim uvrštavanjem vrijednosti $x=1$ i $x=-1$ u jednačinu $2\sqrt{(x^2+x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=0$, dobijamo da je $x=-1$ jedino rješenje.

Zadatak 3

Dat je paralelogram $ABCD$. Označimo sa M sredinu segmenta $\overline{AD}$, a sa P podnožje okomice iz tačke B na $\overline{CM}$. Dokazati da je $|\overline{AP}| = |\overline{AB}|$.

Rješenje. Označimo sa N sredinu stranice $\overline{BC}$.

Jednostavno se pokazuje da je $\overline{CM}$ paralelno sa $\overline{AN}$. Kako to vrijedi, imamo da je $\overline{BP}$ okomito na $\overline{AN}$. Kako je trougao BPC pravougli, te N je središte hipotenuze, to je $|\overline{BN}| = |\overline{CN}| = |\overline{PN}|$.

U četverouglu $ABNP$ imamo da se dijagonale sijeku pod uglom od 90 stepeni, te da je $|\overline{PN}| = |\overline{BN}|$. Lahko se pokazuje da su trouglovi APN i ABN podudarni ($|\overline{AN}| = |\overline{AN}|, |\overline{PN}| = |\overline{BN}|$, $\angle ANP = \angle ANB$).

Dakle, $|\overline{AB}| = |\overline{AP}|$.

Zadatak 4

Pozitivni cijeli brojevi m i n su takvi da je $m^{2018} + m + n^2$ djeljivo sa mn. Dokazati da je m potpun kvadrat.

Rješenje. Neka je $d = NZD(m, n)$. Tada je $m = da$ i $n = db$, gdje je $NZD(a, b) = 1$.

Sada imamo da

$$d^2ab | d^{2018}a^{2018} + da + d^2b^2.$$

Na osnovu toga, vrijedi da je

$$dab | d^{2017}a^{2018} + a + db^2.$$

Sada se zaključuje da $d|a$.

Istovremeno, kako je $NZD(a, b) = 1$, te $a|db^2$, imamo da je $a|d$. Ovo je moguće samo kada je $a = d$.

Dakle, $m = da = d^2$.

Zadaci za treći razred

17.3.2018. godine

Zadatak 1

Naći sva rješenja jednačine

$$2^{\cos x} = 3 - \cos^2 x.$$

Zadatak 2

Ukoliko je trocifreni broj $\overline{abc}$ djeljiv sa 27, dokazati da su tada i brojevi $\overline{bca}$ i $\overline{cab}$ djeljivi sa 27.

Zadatak 3

Tačka D nalazi se na stranici $\overline{BC}$ trougla ABC, takva da je $\angle ABC = \angle DAC = 30^\circ$ i $\angle ADB = 45^\circ$. Dokazati da je $|\overline{BD}| = |\overline{DC}|$.

Zadatak 4

Na koliko načina možemo podijeliti skup prirodnih brojeva $\{1,2,3,\dots,12\}$ na šest po parovima disjunktnih podskupova, gdje je svaki podskup sačinjen od dva elementa i elementi u bilo kojem podskupu su relativno prosti. Za dva skupa kažemo da su disjunktni ako i samo ako je njihov presjek prazan skup.

Svaki zadatak nosi 25 bodova.
Vrijeme za izradu zadataka je 120 minuta.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.

Sretno!

Rješenja zadataka za treći razred

Zadatak 1

Naći sva rješenja jednačine

$$2^{\cos x} = 3 - \cos^2 x.$$

Rješenje. Poznato je da je najveća vrijednost funkcija sinus i kosinus jednaka jedan. Zbog toga imamo

$$2^{\cos x} \leq 2.$$

S druge strane, kako je $\cos^2 x$ također najviše jednako jedinici, vrijedi

$$3 - \cos^2 x \geq 2.$$

Dakle,

$$2^{\cos x} \leq 2 \leq 3 - \cos^2 x.$$

Znak jednakosti mora vrijediti, a on se postiže kada je

$$\cos x = 1.$$

Ovo vrijedi za $x = 2k\pi$, gdje je k proizvoljan cijeli broj.

Zadatak 2

Ukoliko je trocifreni broj $\overline{abc}$ djeljiv sa 27, dokazati da su tada i brojevi $\overline{bca}$ i $\overline{cab}$ djeljivi sa 27.

Rješenje. Posmatrajmo razliku prirodnih brojeva $\overline{abc}$ i $\overline{bca}$.

Imamo da vrijedi

$$\overline{abc} - \overline{bca} = 100a + 10b + c - 100b - 10c - a = 99a - 90b - 9c = 9(11a - 10b - c).$$

Kako je broj $\overline{abc}$ djeljiv sa 27, da bi riješili zadatak, dovoljno je pokazati da je $11a - 10b - c$ djeljivo sa 3. Drugačije rečeno, trebamo pokazati da je $2a - b - c$ djeljivo sa 3.

Iz $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, imamo da je $a + b + c$ djeljivo sa 3, tj. $b + c = 3k - a$.

Dakle, $b + c = -3k + a$, pa je $2a - b - c = 2a - 3k + a = 3(a - k)$. Izraz je djeljiv sa 3.

Slično se pokazuje i za $\overline{cab} = 100c + 10a + b$. Tada je

$$\overline{abc} - \overline{cab} = 100a + 10b + c - 100c - 10a - b = 90a + 9b - 99c = 9(10a + b - 11c).$$

Dakle, $a + b - 2c$ mora biti djeljivo sa 3. Kako je $\overline{abc}$ djeljivo sa 27, a samim tim i sa 3, imamo da je $a + b + c = 3k$, pa je $a + b = 3k - c$. Dakle, $a + b - 2c = 3k - c - 2c = 3k - 3c = 3(k - c)$.

Zadatak 3

Tačka D nalazi se na stranici $\overline{BC}$ trougla ABC, takva da je $\angle ABC = \angle DAC = 30°$ i $\angle ADB = 45°$. Dokazati da je $|\overline{BD}| = |\overline{DC}|$.

Rješenje 1. Neka je O centar opisane kružnice trougla ABC i neka je E tačka gdje $\overline{AD}$ drugi put siječe kružnicu.

Kako je centralni ugao dvostruko veći od periferijskog, imamo da je $\angle COA = 2\angle CBA = 60°$. Isto tako je $\angle EOC = 2\angle EAC = 60°$. Koristeći da je $|\overline{AO}| = |\overline{CO}| = |\overline{EO}|$, imamo da su trouglovi OAC i OCE jednakostranični. Na osnovu toga, $\overline{AE}$ je okomito na $\overline{OC}$, te imamo da je $|\overline{DO}| = |\overline{DC}|$ i $|\overline{EO}| = |\overline{EC}|$.

Sada je ΔDOE podudaran sa ΔDCE, te je samim tim $\angle ODE = \angle CDE = \angle ADB = 45°$. Dakle, $\overline{OD}$ je okomito na $\overline{BC}$. Iz toga imamo da je D središte stranice $\overline{BC}$, kao što se i tražilo.

Rješenje 2. U trouglu ABD imamo da je $\angle BAD = 180° - 30° - 45° = 105°$.

Poznato je da vrijedi $\sin 105° = \cos 15°$, te $\sin 30° = 2\sin 15° \cos 15°$.

Uz upotrebu sinusne teoreme na trougao ABD, imamo da je

$$|\overline{BD}| = \frac{\sin 105°}{\sin 30°}|\overline{AD}| = \frac{1}{2\sin 15°}|\overline{AD}|.$$

S druge strane, primjenom sinusne teoreme na trougao ADC, dobijamo

$$|\overline{DC}| = \frac{\sin 30°}{\sin 15°}|\overline{AD}| = 2\cos 15°\,|\overline{AD}|.$$

Konačno, koristeći da je $\sin 30° = \frac{1}{2}$, imamo da je $1 = 2\sin 30° = 4\sin 15° \cos 15°$. Sada je

$$\frac{1}{2\sin 15°} = 2\cos 15°,$$

što implicira da je $|\overline{BD}| = |\overline{DC}|$.

Zadatak 4

Na koliko načina možemo podijeliti skup prirodnih brojeva $\{1,2,3,\dots,12\}$ na šest po parovima disjunktnih podskupova, gdje je svaki podskup sačinjen od dva elementa i elementi u bilo kojem podskupu su relativno prosti. Za dva skupa kažemo da su disjunktni ako i samo ako je njihov presjek prazan skup.

Rješenje. Nikoja dva parna broja ne mogu biti u istom podskupu. Kako ukupno imamo šest podskupova, te šest parnih i šest neparnih brojeva, jasno je da u svakom paru mora biti jedan paran i jedan neparan broj. Nazovimo te parove *par-nepar*.

Osim toga, broj 6 i broj 12 ne mogu biti upareni sa 3 i 9, te broj 10 ne može biti uparen sa 5.

Ovo znači da neparni brojevi 1, 7 i 11 mogu biti upareni sa parnim brojevima 2, 4, 6, 8, 10 i 12, brojevi 3 i 9 mogu biti upareni sa 2, 4, 8 i 10, te broj 5 može biti uparen sa 2, 4, 6, 8 i 12.

Neophodno je da posmatramo dva slučaja.

Neka je u prvom slučaju 5 upareno sa 6 ili 12. To znači da ukupno imamo

$$2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 144$$

mogućnosti.

U drugom lsučaju, neka je 5 upareno sa 2, 4 ili 8. Tada imamo ukupno

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 108$$

mogućnosti.

Ukupan broj mogućnosti jednak je $144 + 108 = 252$.

Zadaci za četvrti razred

17.3.2018. godine

Zadatak 1

Izračunati vrijednost izraza

$$1 - 2^2 + 3^3 - 4 + 5^2 - 6^3 + 7 - 8^2 + 9^3 - \cdots - 40 + 41^2 - 42^3.$$

Zadatak 2

Neka je dat prirodan broj n takav da je $n = pqr$, gdje su p, q i r prosti brojevi. Neka je

$$(p + 1) \cdot (q + 1) \cdot r = n + 138.$$

Odrediti vrijednost broja n.

Zadatak 3

Matematički klubovi su iznenadno postali popularni u Bosni i Hercegovini i svaki učenik se učlanio u neki klub (ili više njih). Svaka dva kluba imaju najmanje jednog zajedničkog člana. Dokazati da je moguće podijeliti linijare i šestare učenicima tako da je tačno jedan dobio i linijar i šestar, a svaki klub posjeduje i linijar i šestar.

Zadatak 4

Unutar trougla ABC, simetrale uglova kod vrha B i C sijeku suprotne stranice $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ u tačkama E i F, redom. Dokazati da je trougao ABC jednakokraki ukoliko je zadovoljen bar jedan od uslova:

a) $|\overline{AE}| = |\overline{AF}|$
b) $|\overline{BF}| = |\overline{CE}|$.

Svaki zadatak nosi 25 bodova.
Vrijeme za izradu zadataka je 120 minuta.
Nije dozvoljena upotreba kalkulatora, mobitela, tableta i drugih uređaja.

Sretno!

Rješenja zadataka za četvrti razred

Zadatak 1

Izračunati vrijednost izraza

$$1 - 2^2 + 3^3 - 4 + 5^2 - 6^3 + 7 - 8^2 + 9^3 - \cdots - 40 + 41^2 - 42^3.$$

Rješenje. Označimo sa S datu sumu. Nakon detaljnije analize sume S, možemo uočiti da se svaki šesti element ponavlja po obliku (predznak i stepen).

Stoga, sumu možemo napisati kao

$$S = \sum_{k=1}^{7}(6k-5) - \sum_{k=1}^{7}(6k-2) - \sum_{k=1}^{7}(6k-4)^2$$
$$+\sum_{k=1}^{7}(6k-1)^2 + \sum_{k=1}^{7}(6k)^3 - \sum_{k=1}^{7}(6k-3)^3.$$

Raspisivanjem ove sume, dobijamo da je

$$S = -324\sum_{k=1}^{7}k^2 + 198\sum_{k=1}^{7}k - 45\sum_{k=1}^{7}1$$
$$= -324 \cdot 140 + 192 \cdot 28 - 45 \cdot 7$$
$$= -40131.$$

Radi kraćeg pisanja, koristi se standardna oznaka za sumu, gdje

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

označava sumu vrijednosti

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n).$$

Zadatak 2

Neka je dat prirodan broj n takav da je $n = pqr$, gdje su p, q i r prosti brojevi. Neka je

$$(p+1)\cdot(q+1)\cdot r = n + 138.$$

Odrediti vrijednost broja n.

Rješenje. Izraz se može zapisati kao

$$pqr + pr + qr + r = pqr + 138.$$

Dakle

$$r\cdot(q+p+1) = 138.$$

Iz ove jednačine imamo da je

$$r\cdot(p+q+1) = 138 = 2\cdot 3\cdot 23.$$

Ostaje da ispitamo slučajeve. Kako su p, q i r prosti, to za r imamo mogućnosti $r = 2, r = 3$ ili $r = 23$.

Za $r = 2$ imamo da je $p + q + 1 = 69.$ Jednostavnom provjerom pronalazimo da su parovi koji zadovoljavaju jednačinu $(p, q) \in \{(7, 61), (61, 7), (31, 37), (37,31)\}.$ Dakle, $n = 854$ ili $n = 2294$.

Za $r = 3$, sličnom provjerom imamo $p + q = 45.$ Parovi koji zadovoljavaju ovu jednačinu su $(p, q) \in \{(2, 43), (43, 2)\}$, što znači da je $n = 258$.

Za $r = 23$, imamo da je $p + q = 5$, tj. $(p, q) \in \{(2,3), (3,2)\}$. Dakle, $n = 138$.

Konačno, moguće vrijednosti za n su: $138, 258, 854$ i 2294.

Zadatak 3

Matematički klubovi su iznenadno postali popularni u Bosni i Hercegovini i svaki učenik se učlanio u neki klub (ili više njih). Svaka dva kluba imaju najmanje jednog zajedničkog člana. Dokazati da je moguće podijeliti linijare i šestare učenicima tako da je tačno jedan dobio i linijar i šestar, a svaki klub posjeduje i linijar i šestar.

Rješenje. Posmatrajmo osobu koja se nalazi u najviše matematičkih klubova.

Ukoliko ima više takvih osoba, izaberimo jednu od njih i označimo je sa A. Osobi A ćemo dodijeliti linijar i šestar.

Svim osobama sa kojima je A u istom društvu dodijelimo linijar. Svim osobama sa kojima A nije u društvu, dodijelimo šestar.

Time smo osigurali da će svaka grupa u kojoj je A imati linijar i šestar.

S druge strane, svaka grupa u kojoj nije A ima sa svakom grupom u kojoj jeste A bar jednog zajedničkog člana. Međutim, taj član ima linijar, a svi članovi grupe u kojoj se ne nalazi A imaju šestar, pa će svaki klub u konačnici imati i linijar i šestar.

Zadatak 4

Unutar trougla ABC, simetrale uglova kod vrha B i C sijeku suprotne stranice $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ u tačkama E i F, redom. Dokazati da je trougao ABC jednakokraki ukoliko je zadovoljen bar jedan od uslova:

a) $|\overline{AE}| = |\overline{AF}|$
b) $|\overline{BF}| = |\overline{CE}|$.

Rješenje.

a) Neka je I presjek simetrala uglova trougla ABC. Tada je $\overline{AI}$ simetrala $\angle BAC$. Kako je $|\overline{AE}| = |\overline{AF}|$, te kako je $\overline{AI}$ zajednička stranica za ΔAEI i ΔAFI, trouglovi su podudarni po pravilu SUS. Dakle, $\angle AFI = \angle AEI$.
Ovi uglovi su vanjski uglovi za ΔBIF i ΔCIE. Na osnovu toga vrijedi
$$\angle IBF + \angle FIB = \angle EIC + \angle ECI.$$
Dakle, $\angle IBF = \angle ECI$, te $\angle CBA = \angle ACB$ iz čega imamo da je trougao ABC jednakokraki.

b) Neka je $x = |\overline{AF}|$, $y = |\overline{AE}|$ i $z = |\overline{BF}| = |\overline{CE}|$. Zbog činjenice da simetrala ugla dijeli nasuprotne stranice u omjeru susjednih stranica uglu, imamo da je
$$\frac{x}{z} = \frac{y+z}{a}$$
i
$$\frac{y}{z} = \frac{x+z}{a}.$$
Iz toga je
$$\frac{a}{z} = \frac{y+z}{a} = \frac{x+z}{a}.$$
Sada imamo da je $y^2 + yz = x^2 + xz$, iz čega je $(y - x) \cdot (x + y + z) = 0$.
Kako je $x + y + z > 0$, mora biti $y = x$. Dakle, $x + z = y + z = |\overline{AC}|$.